本书得到浙江财经学院学术专著出版资金资助(2005 年度)

算子方程的正解及其逼近

陈晓雷 著

江西高校出版社

目　　录

第一章　线性与非线性算子

本章扼要地陈述一些与以后各章内容紧密相关的线性泛函分析中的基本概念与结果，继而论述非线性算子的一般性质，包括连续性、有界性、全连续性、可微性等.

§1.1　度量空间

定义 1.1.1　设 X 是一非空集合，若对于 X 中的任意两点 x、y，有惟一确定的实数 $\rho(x,y)$ 满足：

(1) 非负性：$\rho(x,y) \geqslant 0$，$\rho(x,y) = 0$，当且仅当 $x = y$；

(2) 对称性：$\rho(x,y) = \rho(y,x)$；

(3) 三角不等式：$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$.

则称 X 是以 ρ 为距离的度量空间，记为 (X,ρ)，而称 $\rho(x,y)$ 为点 x，y 之间的距离. 通常也简称 X 为**度量空间**.

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的点列，又 $x_0 \in X$，若

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0,$$

则称 x_0 为点列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

给定度量空间 (X,ρ)，$x_0 \in X$，以及 $r > 0$，点集

$$B(x_0, r) = \{x \mid x \in X, \rho(x, x_0) < r\}$$

叫做 X 内以点 x_0 为中心，以 r 为半径的**开球**.

设 $E \subset X$，而 X 内有一个开球 $B(x_0,r) \supset E$，则称 E 是 X 内的**有界集**.

定义 1.1.2　设 $x_0 \in (X, \rho)$，$r > 0$，以 x_0 为中心，以 r 为半径的开球 $B(x_0, r)$，称为 x_0 的一个**球形邻域**，简称为**邻域**.

设 $G \subset X$，$x \in G$，若存在 x 的一个邻域 $B(x, r)$，使 $B(x, r) \subset G$，则称 x 是 G 的**内点**. 若 G 中每点均为其内点，则称 G 为**开集**.

定义 1.1.3　给定度量空间 (X, ρ)，$E \subset X$，$x_0 \in X$，若 x_0 的任一邻域 $B(x_0, \varepsilon)$ 中均含有 $E - \{x_0\}$ 中的点，则称 x_0 是 E 的**聚点**或**极限点**.

E 的全部聚点所组成的集合称为 E 的**导集**，记为 E'. 若 $E' \subset E$，则称 E 是**闭集**.

称 $E = E \cup E'$ 为集合 E 的**闭包**.

定义 1.1.4　给定度量空间 (X, ρ)，$\{x_n\} \subset X$，若对任意正数 ε，有自然数 $N(\varepsilon)$，使 $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$，对任意的 $m, n > N(\varepsilon)$ 均成立，则称序列 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy **点列**或**基本列**.

若 X 中任一 Cauchy 点列都收敛，则称 X 为**完备的度量空间**.

定义 1.1.5　设 X 为实(或复)数域 F 上的线性空间，若对每个 $x \in X$，总有一个确定的实数 $\| x \|$ 满足：

(1) $\| x \| \geqslant 0$；$\| x \| = 0$，当且仅当 $x = \theta$；

(2) $\| \alpha x \| = | \alpha | \, \| x \|$　$(\alpha \in F)$；

(3) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

则称 $\| x \|$ 为 X 上的**范数**，称 X 为赋以范数 $\| x \|$ 的**线性赋范空间**.

在线性赋范空间 X 中，对任何 $x, y \in X$，令

$$\rho(x, y) = \| x - y \|,$$

则易知 $\rho(x, y)$ 是 X 上的距离，于是此时 X 又成了度量空间.

定义 1.1.6　完备的线性赋范空间称为 Banach **空间**.

例 1.1.1　对于 n 维实(或复)向量空间 R^n 中的每个元 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，定义

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | x_i |^2},$$

则 R^n 是赋以范数 $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$ 的 Banach 空间.

例 1.1.2 对 $[a,b]$ 上连续函数空间 $C_{[a,b]}$ 中的每个元 x,定义

$$\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|,$$

则 $C_{[a,b]}$ 是赋以范数 $\|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$ 的 Banach 空间.

例 1.1.3 空间 $L^p_{[a,b]}$ $(1 \leqslant p < +\infty)$.

设 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的实值可测函数,取定 $p(1 \leqslant p < +\infty)$,若 $|f(t)|^p$ 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积,则称 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 上的 p 次可积函数. $[a,b]$ 上 p 次可积函数全体记为 $L^p_{[a,b]}$.

对每个 $f \in L^p_{[a,b]}$,定义

$$\|f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |f|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 $L^p_{[a,b]}$ 是赋以范数 $\|f\|_p = \left(\int_{[a,b]} |f|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}$ 的 Banach 空间.

例 1.1.4 数列空间 l^p $(1 \leqslant p < +\infty)$.

记满足 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$ 的实数列(或复数列) $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$ 全体为 l^p. 在 l^p 中按照对每个坐标为 x_k 的线性运算,易知它成为线性空间. 在 l^p 中规定

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 l^p 即成 Banach 空间.

定义 1.1.7 设 X 是线性空间,在 X 上赋以两个范数 $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$,若存在正的常数 c_1 和 c_2,使对一切 $x \in X$ 成立:

$$c_1 \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_2 \|x\|_2$$

则称范数 $\|x\|_1$ 与 $\|x\|_2$ 是**等价的**.

定义 1.1.8 设 X 为度量空间, $M \subset R$,若 M 中的任何点列必有在 X 中收敛的子序列,则称 M 是(X 中的) **列紧集**(或称**致密集**). 若 X 自身是列紧集,就称 X 是**列紧空间**(或**致密空间**).

定义 1.1.9　度量空间 X 中的列紧闭集 M,称为**紧集**.

或者:对度量空间 X 中的子集 M,若 X 中每个覆盖 M 的开集族中必可选出有限个开集覆盖 M,则称 M 为**紧集**.

若 M 的闭包 $\overline{M}$ 是紧的,则称 M 是**相对紧集**.

定理 1.1.1　度量空间 X 中的紧集 M 上的连续函数 f 必然有界,而且可达上、下确界.

定义 1.1.10　给定度量空间 X,$M \subset X$,给定 $\varepsilon > 0$,若有点集 $A \subset X$,对每点 $x \in M$,$\exists\, x_\varepsilon \in A$,使 $\rho(x, x_\varepsilon) < \varepsilon$. 换言之,以 A 中各点为心,以正数 ε 为半径的开球族能盖住 M:

$$\bigcup_{y \in A} B(y, \varepsilon) \supset M,$$

则称 A 是 M 的一个 ε - **网**.

若对任何 $\varepsilon > 0$,集 M 总有有限的 ε - 网:$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset M$(点的个数 n 与 ε 有关),则称 M 是**全有界集**.

定理 1.1.2　设 M 是完备度量空间 X 的子集,则 M 为全有界集的充要条件是 M 为相对紧集.

定理 1.1.3　设 X 为完备的度量空间,则 $M \subset X$ 为列紧集的充要条件是对 $\forall\, \varepsilon > 0$,$M$ 存在列紧的 ε - 网.

定义 1.1.11　设 E 是 $[a,b]$ 上的一族连续函数,$E \subset C_{[a,b]}$,若对 $\forall\, \varepsilon > 0$,$\exists\, \delta > 0$,使对 $\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]$,当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,对 E 中每个函数 f 都有:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad (\delta \text{ 与 } E \text{ 中的 } f \text{ 无关}),$$

则称 E 是**等度连续的函数族**.

若存在常数 $c > 0$,使对一切 $f(x) \in E$,对 $\forall\, x \in [a,b]$,总有

$$|F(x)| < c,$$

则称 E 是**一致有界的函数族**.

定理 1.1.4　点集 $M \subset C_{[a,b]}$ 列紧的充要条件是 M 一致有界且等度连续.

§1.2 线性算子与线性泛函

定义 1.2.1 设 X 和 Y 同为实(或复)数域 F 上的线性空间，由 X 的某个子集 D 到 Y 中的映射 A 称为**算子**，而称 D 是算子 A 的**定义域**，记为 $D(A)$，称 $AD = \{Ax \mid x \in D\}$ 是 A 的**值域**，记为 $R(A)$.

若 A 映 X 中的有界集成 Y 中的有界集，且

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay \quad (\forall \alpha, \beta \in F, x、y \in X),$$

则称 A 是**有界线性算子**.

特别，当 $Y = F$(数域) 时，称 A 是 X 上的**有界线性泛函**.

虽然 A 为有界线性算子的充要条件是存在常数 $C > 0$，使对 $\forall x \in X$，有

$$\| Ax \| \leqslant c \| x \|$$

定理 1.2.1 线性算子 $A: X \to Y$ 为连续的充要条件是 A 有界.

设 X, Y 为线性赋范空间，记 $B(X, Y)$ 为从 X 到 Y 中的所有的有界线性算子构成的集合，很显然，$B(X, Y)$ 是数域 F 上的线性空间. 对每个 $A \in B(X, Y)$，令

$$\| A \| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|}{\| x \|},$$

则 $\| \cdot \|$ 是 $B(X, Y)$ 上的范数. 因此 $B(X, Y)$ 是赋范线性空间.

定理 1.2.2 $B(X, Y)$ 为 Banach 空间的充要条件是 Y 为 Banach 空间.

特别：当 $Y = F$(数域) 时，记 $B(X, F) = X^*$，它称为 X 的**共轭空间**，由于数域 F 总是完备的，故共轭空间 X^* 总是 Banach 空间.

定义 1.2.2 设 X 是线性赋范空间，X^* 是 X 的共轭空间，$x_n \in X, n = 1, 2, \cdots$，若 $\exists x \in X$，使得 $\| x_n - x \| \to 0 (n \to \infty)$，则称**点列** $\{x_n\}$ **强收敛**于 x. 记为 $x_n \xrightarrow{强} x (n \to \infty)$.

若对 $\forall f \in X^*$，均有 $f(x_n) \to f(x)$(按绝对值距离)，$(n \to$

∞),则称**点列** $\{x_n\}$ **弱收敛**于 x. 记为 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x(n \to \infty)$.

定义 1.2.3 对 $A_n \in B(X,Y), n = 1,2,\cdots$,若 $\exists A \in B(X, Y)$,使得:

(1) $\| A_n - A \| \to 0(n \to \infty)$,则称**算子列** $\{A_n\}$ **一致收敛**于 A;

(2) $\forall x \in X$, $\| A_n x - Ax \| \to 0(n \to \infty)$,则称**算子列** $\{A_n\}$ **强收敛**于 A;

(3) 对 $\forall x \in X$ 和 $\forall f \in X^*$,有 $f(A_n x) \to f(Ax)(n \to \infty)$,则称**算子列** $\{A_n\}$ **弱收敛**于 A.

定义 1.2.4 设 X 是线性赋范空间,X^* 是 X 的共轭空间,泛函列 $f_n \in X^*, n = 1,2,\cdots$,若 $\exists f \in X^*$,使

(1) $\| f_n - f \| \to 0(n \to \infty)$,则称**泛函列** $\{f_n\}$ **强收敛**于 f;

(2) $\forall x \in X$,均有 $| f_n(x) - f(x) | \to 0(n \to \infty)$,则称**泛函列** $\{f_n\}$ **弱* 收敛**于 f;

(3) 对 $\forall F \in (X^*)^*$,均有 $F(f_n) \to F(f)(n \to \infty)$,则称**泛函列** $\{f_n\}$ **弱收敛**于 f.

注 1:一般来说,泛函列弱* 收敛与弱收敛不一致,但若 X 与 $X^{**} = (X^*)^*$ 之间能建立起等距同构 $J:(Jx)(f) = f(x)(x \in X)$ 时,则称 X 是自反的. 在自反空间中,这两种收敛是等价的.

注 2:易见,泛函列的强收敛相当于算子列的一致收敛,泛函列的弱* 收敛相当于算子列的强收敛.

定理 1.2.3 (Hahn - Banach **有界线性泛函延拓定理**):设 X 是线性赋范空间,D 是 X 上的线性子空间,则 D 上任一线性有界泛函 f 可以延拓到整个空间 X,并且保持范数不变,即存在 X 上的线性有界泛函 F,满足:

(1) $F(x) = f(x), \forall x \in D$;

(2) $\| F \|_X = \| f \|_D$.

系:设 X 是线性赋范空间,$X \neq \{\theta\}$,则对于 X 中任一 $x_0 \neq \theta$,必存在 X 上的线性有界泛函 f,满足:

(1) $\| f \| = 1$;

(2) $f(x_0) = \| x_0 \|$.

定义 1.2.5 设 X, Y 是线性赋范空间，A 是 X 到 Y 的线性算子，若 A 的值域 $R(A) = Y$，且 A 的逆算子 A^{-1} 存在，又 A^{-1} 为有界线性算子，则称 A 是**正则算子**.

定理 1.2.4 （**逆算子定理**）：若 $(X, \| \cdot \|_1)$，$(Y, \| \cdot \|_2)$ 是 Banach 空间，A 是 X 到 Y 上的一一线性有界算子，则 A^{-1} 是线性有界算子.

定义 1.2.6 设 X 是线性空间，λ 为一复数，A 是 $X \to X$ 的线性算子，若有 X 中的非零向量 $x \in D(A)$，使

$$Ax = \lambda x$$

则称 λ 是 A 的**特征值**，而称 x 为 A（相应于特征值 λ）的**特征向量**.

在微分方程的求解中，除去求解形如

$$(\lambda I - A)x = 0$$

的齐次方程外，还经常遇到非齐次方程

$$(\lambda I - A)x = f.$$

其中 A 是给定的算子，f 是已知向量，x 是未知向量. 为了研究这种方程的求解问题，有必要介绍算子 A 的正则点和谱点的概念.

定义 1.2.7 设 X 是复的赋范线性空间，A 是 X 的线性子空间 $D(A)$ 到 X 中的线性算子，又设 λ 是一复数，如果 $(\lambda I - A)$ 是正则算子，即 $\lambda I - A$ 是 $D(A)$ 到 X 上的一对一的线性算子，而且它的逆算子 $(\lambda I - A)^{-1}$ 是 X 到 X 中的有界线性算子时，称 λ 是 A 的**正则点**，并称 $(\lambda I - A)^{-1}$ 为 A 的**豫解算子**. 不是正则点的复数 λ，称为 A 的**谱点**，复平面上正则点全体称为 A 的**正则集**，记为 $\rho(A)$. 谱点全体称为 A 的**谱集**，记为 $\sigma(A)$.

以上内容在一般的泛函分析书上均能找到，所以只作简要陈述，而未给出证明或作进一步的阐述.

§1.3 非线性算子的基本概念

设 E_1 和 E_2 是两个实 Banach 空间，$D \subset E_1$，$A: D \to E_2$ 为非线性算子.

定义 1.3.1 设 $x_0 \in D$，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$，使当 $x \in D$，且 $\| x - x_0 \| < \delta$ 时，恒有：

$$\| Ax - Ax_0 \| < \varepsilon,$$

则称 A **在** x_0 **连续**；

若 A 在 D 中每一点都连续，则称 A **在** D **上连续**；

若上述 δ 只与 ε 有关，而与 $x_0 \in D$ 无关，则称 A **在** D **上一致连续**.

注 1：易知，A 在 $x_0 \in D$ 连续的充要条件是：对 $\forall x_n \in D$，$x_n \to x_0$，均有 $Ax_n \to Ax_0 (n \to \infty)$.

定义 1.3.2 若 A 将 D 中的任何有界集变成 E_2 中的有界集，则称 A **在** D **上有界**.

注 2：对于线性算子而言，连续性与有界性是等价的，但对于非线性算子，则没有这种等价关系.

反例 考察 $X = l^2$ 上的泛函：

$$f(x) = \sum_{|x_i| \geq 1} (|x_i| - 1) \cdot i$$

$$(\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots) \in l^2).$$

由 l^2 中元素的特征：$\sum_{k=1}^{\infty} x_k < +\infty$ 知 $\lim_{i \to \infty} x_i = 0$，故对 $\forall x \in l^2$，在 $f(x)$ 的表达式中至多只有有限项不为零，即只有有限项相加，因此 $f(x)$ 存在.

又若

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots) \in l^2, x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^2,$$

且

$$\| x^{(n)} - x \| = \{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2\}^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

亦即 l^2 中的点列依范收敛可导出按分量收敛,从而必有 $f(x^{(n)}) \to f(x)$,故 f 是 m^2 上的连续泛函,但它不是有界的.事实上,取 $x^{(n)} = 2e_n$,其中 $\{e_n\}$ 是 l^2 上的标准基,则 $x^{(n)} \in l^2$ 且 $\| x^{(n)} \| = 2(n = 1,2,\cdots)$,但 $f(x^{(n)}) = n \to \infty(n \to \infty)$.

定义 1.3.3 若 A 将 D 中任何有界集 S 映成 E_2 中的列紧集 $A(S)$(即 $A(S)$ 是相对紧集,亦即它的闭包 $\overline{A(S)}$ 是 E_2 中的紧集),则称 A 是映 D 入 E_2 的**紧算子**.

注 1:易知,A 在 D 上紧的充要条件是:对于 D 中任何有界序列 $\{x_n\}$,必有子序列 $\{x_{n_k}\}$ 存在,使序列 $\{Ax_{n_k}\}$ 有 E_2 中收敛.

注 2:显然,紧算子必有界.

定义 1.3.4 若紧算子 $A:D \to E_2$ 是连续的,则称 A 是映 D 入 E_2 的**全连续算子**.

易知,若 A 为线性算子,则 A 为全连续的充要条件是将 E_1 中的单位球 $S = \{x \mid x \in E_1, \| x \| \leqslant 1\}$ 映成 E_2 中的列紧集.

定理 1.3.1 设 $A_n:D \to E_2$ 连续$(n = 1,2,\cdots)$,$A:D \to E_2$,若对 D 中任何有界集 S,当 $n \to \infty$ 时,$\| A_n x - Ax \|$ 都一致趋于零(关于 $x \in S$),则 $A:D \to E_2$ 也是全连续算子.

证 先证 A 连续.设 $x_n \to x_0(x_n, x_0 \in D)$,则 $S = \{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$ 是 D 中有界集.于是 $\forall \varepsilon > 0$,可取 k,使

$$\| A_k x_n - Ax_n \| < \frac{\varepsilon}{3}, (n = 0,1,2,\cdots). \qquad (1.3.1)$$

由 A_k 的连续性知 $\exists N$,当 $n > N$ 时,恒有:

$$\| A_k x_n - A_k x_0 \| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由(1.3.1)式知,当 $n > N$ 时,恒有:

$$\| Ax_n - Ax_0 \| \leqslant \| Ax_n - A_k x_n \| + \| A_k x_n - A_k x_0 \| + \| A_k x_0 - Ax_0 \|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

故 $Ax_n \to Ax_0$,所以 A 为连续算子.

再证 A 是紧算子.设 S 是 D 中任一有界集. $\forall \varepsilon > 0$,由假设可取定一个 n,使 $\| A_n x - Ax \| < \varepsilon (\forall x \in S)$,故 $A_n(S)$ 是 $A(S)$ 的一个 ε - 网,但因 A_n 全连续,故 $A_n(S)$ 是列紧集,根据定理 1.1.3 知,$A(S)$ 也是列紧集. #

例 1.3.1 考察 Урысон 算子:

$$A\varphi(x) = \int_G k(x, y, \varphi(y)) \mathrm{d}y \tag{1.3.2}$$

其中函数 $k(x, y, u)$ 定义在 $(x, y) \in G \times G = \hat{G}, -\infty < u < +\infty$ 上,G 为 R^N 中某有界闭集,则当 $k(x, y, u)$ 在 $(x, y) \in G \times G, -\infty < u < +\infty$ 上连续时,Урысон 算子 $A: C(G) \to C(G)$ 全连续.

证 设 S 是 $C(G)$ 中有界集: $\| \varphi \|_C \leqslant a, \forall \varphi \in S$, 于是

$$| A\varphi(x) | = \left| \int_G k(x, y, \varphi(y)) \mathrm{d}y \right| \leqslant M \mathrm{mes} G \quad (\forall \varphi \in S),$$

其中 $M = \max\limits_{(x,y) \in \hat{G}, |u| \leqslant a} | k(x, y, u) |$,故 $A(S)$ 中诸函数一致有界.

$\forall \varepsilon > 0$,由于 $k(x, y, u)$ 在有界闭集 $(x, y) \in \hat{G}, |u| \leqslant a$ 上连续,从而一致连续,故 $\exists \delta > 0$,使当 $|x_1 - x_2| < \delta, (x_1, x_2 \in G)$ 时,恒有:

$$| k(x_1, y, u) - k(x_2, y, u) | < \frac{\varepsilon}{\mathrm{mes} G}, \forall y \in G, |u| \leqslant a,$$

于是 $\forall \varphi \in S$,当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时,恒有:

$$\begin{aligned} & | A\varphi(x_1) - A\varphi(x_2) | \\ = & \left| \int_G [k(x_1, y, \varphi(y)) - k(x_2, y, \varphi(y))] \mathrm{d}y \right| \\ < & \left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{mes} G}\right) \mathrm{mes} G = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $A(S)$ 中诸函数等度连续.据定理 1.1.4 知 A 是映 $C(G)$ 入 $C(G)$

的紧算子.

下证 A 的连续性. 设 $\varphi_n,\varphi_0\in C(G)$, $\|\varphi_n-\varphi_0\|_C\to 0(n\to\infty)$. 令 $a=\sup\{\|\varphi_0\|_C,\|\varphi_1\|_C,\|\varphi_2\|_C,\cdots\}$, $\forall\varepsilon>0$, 由 $k(x,y,u)$ 在 $(x,y)\in\hat{G}$, $|u|\leqslant a$ 的一致连续性知, $\exists\delta>0$, 使当 $|u_1-u_2|<\delta(|u_1|\leqslant a,|u_2|\leqslant a)$ 时, 恒有:

$$|k(x,y,u_1)-k(x,y,u_2)|<\frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}G},\quad\forall(x,y)\in\hat{G}.$$

取 N, 使当 $n>N$ 时, 恒有 $\|\varphi_n-\varphi_0\|_C<\delta$, 于是当 $n>N$ 时, 有:

$$|A\varphi_n(x)-A\varphi_0(x)|\leqslant\int_G|k(x,y,\varphi_n(y))-k(x,y,\varphi_0(y))|\,\mathrm{d}y$$

$$<\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{mes}G}\right)\mathrm{mes}G=\varepsilon,$$

从而 $\|A\varphi_n-A\varphi_0\|_C<\varepsilon$, 故 $\|A\varphi_n-A\varphi_0\|_C\to 0$. #

下面介绍 Fréchet 微分和 Fréchet 导算子的概念.

定义 1.3.5 设 E_1 和 E_2 是 Banach 空间, D 是 E_1 中某开集, $A:D\to E_2$, $x_0\in D$, 且 $x_0+\Delta x\in D$, 若存在有界线性算子 $B\in B(E_1,E_2)$, 使(在 x_0 点附近)

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0}=\frac{\|A(x_0+\Delta x)-Ax_0-B\Delta x\|}{\|\Delta x\|}=0 \tag{1.3.3}$$

则称算子 A 在点 x_0 处 Fréchet **可微**, $B\Delta x$ 叫做 A 在 x_0 处对于 Δx 的 Fréchet **微分**, 记为 $\mathrm{d}[A(x_0)\Delta x]$; 算子 B 叫做 A 在 x_0 点的 Fréchet **导算子**, 记为 $A'(x_0)$, 即 $B=A'(x_0)$; 又有

$$\mathrm{d}[A(x_0)\Delta x]=A'(x_0)\Delta x.$$

注 3: ① 极限式(1.3.3) 可表示为:

$$\|A(x_0+\Delta x)-Ax_0-B\Delta x\|\leqslant\|\Delta x\|\cdot\varepsilon(\|\Delta x\|). \tag{1.3.4}$$

($\varepsilon(\alpha)$ 是正的实函数, 且 $\alpha\to 0$ 时, $\varepsilon(\alpha)\to 0$.)

② 当 $E_1=E_2=R^1$ 时, Fréchet 导算子与平常导函数概念一致,

此时 $A'(x_0) = f'(x_0)$ 是一个数，即 R^1 空间中的一个元，从而也是 R^1 上的一个线性有界泛函.

③ 此处 A 一般为非线性算子，而 $A'(x_0) = B$ 必为有界线性算子. 若 $A \in B(E_1, E_2)$，即 A 为有界线性算子时，必 $A'(x_0) = A(\forall x_0 \in E_1)$.

事实上，因为 A 为有界线性算子，所以 $A(x_0 + \Delta x) - Ax_0 - A\Delta x = \theta$，从而对 $\forall x_0 \in E_1, A'(x_0) = B = A$. 即有界线性算子的导算子为常算子. 这是数学分析中 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha t) = \alpha$($\alpha$ 为常数) 的自然推广.

④Fréchet 导算子是惟一的，即若除 B 外，还有 $B_1 \in B(E_1, E_2)$ 也满足(1.3.3) 式或(1.3.4) 式，则 $B_1 = B$.

事实上，因为

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \| B\Delta x - B_1\Delta x \| \\
&= \| [A(x_0 + \Delta x) - Ax_0 - B_1\Delta x] \\
&\quad - [A(x_0 + \Delta x) - Ax_0 - B\Delta x] \| \\
&\leqslant \| A(x_0 + \Delta x) - Ax_0 - B_1\Delta x \| \\
&\quad + \| A(x_0 + \Delta x) - Ax_0 - B\Delta x \| \\
&\leqslant \| \Delta x \| \varepsilon(\| \Delta x \|) + \| \Delta x \| \varepsilon_1(\| \Delta x \|),
\end{aligned}$$

从而有

$$0 \leqslant \| B - B_1 \| \leqslant \varepsilon(\| \Delta x \|) + \varepsilon_1(\| \Delta x \|).$$

上式左端与 Δx 无关，从而 $B = B_1$.

⑤ 若 A_1, A_2 均在点 x_0 处 Fréchet 可微，则 $\alpha A_1 + \beta A_2$(α, β 均为实数) 也在 x_0 处 Fréchet 可微，并且

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)'(x_0) = \alpha A_1'(x_0) + \beta A_2'(x_0).$$

⑥ 常算子的 Fréchet 导算子为 θ，即若

$$Ax \equiv y_0 \in E_2(\forall x \in E_1),$$

则

$$A'(x_0) = \theta(\forall x_0 \in E_1).$$

⑦ 若 A 在 x_0 处 Fréchet 可微，则 A 在 x_0 点连续.

事实上,由 A 在 x_0 点 Fréchet 可微,知:

$$\begin{aligned}&\| A(x_0+\Delta x)-Ax_0\| - \| B\Delta x\| \\ \leqslant & \| A(x_0+\Delta x)-Ax_0-B\Delta x\| \\ \leqslant & \|\Delta x\| \varepsilon(\|\Delta x\|),\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}&\| A(x_0+\Delta x)-Ax_0\| \\ \leqslant & \| B\Delta x\| + \|\Delta x\| \varepsilon(\|\Delta x\|) \to 0 \quad (\Delta x \to 0),\end{aligned}$$

从而 A 在 x_0 点处连续.

例 1.3.2 设 A 是映 R^n 入 R^m 的算子: $y = Ax$. $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)=(f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n))\in R^m$, 若每个 f_i 均在点 $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\cdots,\tilde{x}_n)$ 的某邻域内具有连续的一阶偏导数, 则对 $\Delta x=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)$, 当 $\|\Delta x\|$ 充分小时,利用中值公式,有:

$$\begin{aligned}&A(\tilde{x}+\Delta x)-A\tilde{x} \\ =&(f_1(\tilde{x}_1+\Delta x_1,\cdots,\tilde{x}_n+\Delta x_n)-f_1(\tilde{x},\cdots,\tilde{x}_n),\cdots, \\ &f_m(\tilde{x}_1+\Delta x_1,\cdots,\tilde{x}_n+\Delta x_n)-f_m(\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_n)) \\ =&\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\Big|_{\tilde{x}+\theta_1\Delta x}\cdot \Delta x_i,\cdots,\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\Big|_{\tilde{x}+\theta_m\cdot\Delta x}\cdot \Delta x_i\right).\end{aligned}$$

由此根据 $\frac{\partial f_s}{\partial x_i}$ 的连续性,即易知 A 在 $\tilde{x}$ 点处 Fréchet 可微,并且 $A'(\tilde{x})$ 由下式表示:

$$A'(\tilde{x})\Delta x=\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\Big|_{\tilde{x}}\cdot \Delta x_i,\cdots,\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\Big|_{\tilde{x}}\cdot \Delta x_i\right).$$

亦即线性算子 $A'(x)$ 是由矩阵 $\left(\frac{\partial f_s}{\partial x_i}\right)_{1\leqslant s\leqslant m,1\leqslant i\leqslant n}$ 所确定的线性变换, $z=A'_{(x)}\Delta x$ 相当于($z=(z_1,z_2,\cdots,z_m)$)

$$\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots \\ z_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \vdots \\ \Delta x_n\end{pmatrix}.$$

由此说明，映有限维空间 R^n 入有限维空间R^m 的算子A 的 Fréchet 可微性，即是数学分析中的全微分的概念：

$$\Delta y_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}\Delta x_n + o(\rho), \rho = \| x \| .$$

因此，Fréchet 微分和 Fréchet 导算子的概念是数学分析中全微分概念在无穷维空间上的推广，区别在于：现在的空间 E 没有坐标，因而没有偏导数概念，Fréchet 微分是应用得最多的一种微分概念，因为 Fréchet微分 $\mathrm{d}[A(x_0)h] = A'_{(x_0)}\Delta x$ 定义成算子改变量：$A(x_0 + \Delta x) - Ax_0$ 的线性主要部分，所以正好反映了将非线性问题线性化. 但 Fréchet 微分对算子的要求是较强的，是一种强微分.

还有一种是 Gâteaux 意义下的弱微分，它是数学分析中方向导数概念的推广，其特点是要求条件较少，如不必要求算子连续，甚至也不必要求定义空间赋范，因此适用范围较广，特别对于泛函用起来很方便. 这里不作介绍，有兴趣的读者可参阅其他参考资料.

例 1.3.3　考察 Урысон 算子：

$$A\varphi_{(x)} = \int_G k(x, y, \varphi(y)\mathrm{d}y,$$

其中函数 $k(x, y, u)$ 在$(x, y) \in G \times G = \hat{G}, -\infty < u < +\infty$ 上有定义，G 表 R^N 中某有界闭集.

设 $k(x, y, u)$ 与 $k'_u(x, y, u)$ 均在 $a \leqslant x, y \leqslant b, | u | \leqslant R$ 中连续，则 A 可看做是定义在空间$C_{[a,b]}$ 中球 $S_{[O,R]}$ 上，取值于 $C_{[a,b]}$ 中的算子. 这时只要 $h(t)$ 充分小(即 $\| h \|$ 充分小)，即有：

$$\begin{aligned} & A\varphi_{0(x)} + h(x) - A\varphi_0(x) \\ = & \int_a^b [k(x, y, \varphi_0(y) + h(y)) - k(x, y, \varphi_0(y))]\mathrm{d}y \\ = & \int_a^b [k'_u(x, y, \varphi_0(y)h(y)) + o(\| h \|)h(y)]\mathrm{d}y \\ = & \int_a^b k'_u(x, y, \varphi_0(y)h(y))\mathrm{d}y + (\int_a^b h(y)\mathrm{d}y) \cdot o(\| h \|) \end{aligned}$$

$$= Bh(x) + \left(\int_a^b h(y)\mathrm{d}y\right) \cdot o(\| h \|),$$

故 $$A'(\varphi_0)h(x) = Bh(x) = \int_a^b K'_u(x, y, \varphi_0(y))h(y)\mathrm{d}y.$$

所以 Урысон 算子是 Fréchet 可微的,且其 Fréchet 导算子 $A'(\varphi_0)$ 是下述线性积分算子:

$$A'(\varphi_0)h(x) = \int_a^b k'_u(x, y, \varphi_0(y))h(y)\mathrm{d}y.$$

定理 1.3.2 (**链锁定理**) 设 E_1, E_2, E_3 均为 Banach 空间,开集 $D \subset E_1$,开集 $H \subset E_2$,$A: D \to E_2$,$B: H \to E_3$ 且 $A(D) \subset H$,设 A 在点 $x_0 \in D$ 处 Fréchet 可微,B 在点 $y_0 = Ax_0$ 处 Fréchet 可微,则复合算子 $BA: D \to E_3$ 在点 x_0 处 Fréchet 可微,并且

$$(BA)'(x_0) = B'(y_0)A'(x_0).$$

证 据 Fréchet 可微的定义知,存在实函数 $\varepsilon_1(\|\Delta x\|)$ 和 $\varepsilon_2(\|\Delta y\|)$,它们分别在 $\Delta x \to 0$ 和 $\Delta y \to 0$ 时趋于零,且使:

$$\| A(x_0 + \Delta x) - Ax_0 - A'(x_0)\Delta x \| \leqslant \| \Delta x \| \varepsilon_1(\| \Delta x \|),$$

$$\| B(y_0 + \Delta y) - By_0 - B'(y_0)\Delta y \| \leqslant \| \Delta y \| \varepsilon_2(\| \Delta y \|).$$

今取 $$\Delta y = A(x_0 + \Delta x) - Ax_0 = A(x_0 + \Delta x) - y_0,$$

则 $$A(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y.$$

注意到 $A'(x_0)$ 与 $B'(y_0)$ 都是线性有界算子:

$$\begin{aligned}
&\| BA(x_0 + \Delta x) - BAx_0 - B'(y_0)A'(x_0)\Delta x \| \\
\leqslant &\| B(y_0 + \Delta y) - By_0 - B'(y_0)\Delta y \| \\
&+ \| B'(y_0)\Delta y - B'(y_0)A'(x_0)\Delta x \| \\
\leqslant &\| \Delta y \| \varepsilon_2(\| \Delta y \|) + \| B'(y_0) \| \, \| A(x_0 + \Delta x) \\
&- Ax_0 - A'(x_0)\Delta x \| \\
\leqslant &\| \Delta y \| \varepsilon_2(\| \Delta y \|) + \| B'(y_0) \| \, \| \Delta x \| \varepsilon_1(\| \Delta x \|),
\end{aligned}$$

由 A 的 Fréchet 可微性知:

$$\begin{aligned}
\| \Delta y \| &= \| A(x_0 + \Delta x) - Ax_0 \| \\
&\leqslant A'(x_0)\Delta x \| + \| \Delta x \| \varepsilon_1(\| \Delta x \|)
\end{aligned}$$

$$\leqslant [\| A'(x_0) \| + \varepsilon_1(\| \Delta x \|)] \| \Delta x \|.$$

易见当 $\Delta x \to 0$ 时,$\Delta y \to 0$,于是定理得证. #

系:设 $A:D \to E_2, B:E_2 \to E_3$ 线性有界.若 A 在点 $x_0 \in D$ 处 Fréchet 可微,则 BA 在点 x_0 处也 Fréchet 可微,并且

$$(BA)'(x_0) = BA'(x_0).$$

定理 1.3.3 设 E_1, E_2 均为 Banach 空间,D 是 E_1 中的开集.若 $A:D \to E_2$ 全连续,且在点 $x_0 \in D$ 处 Fréchet 可微,则 $A'(x_0):E_1 \to E_2$ 全连续.

证 由于 $A'(x_0)$ 是线性算子,故只需证 $A'(x_0)$ 将 E_1 中单位球 $S = \{x \mid x \in E_1, \| x \| \leqslant 1\}$ 变成 E_2 中的列紧集 $A'(x_0)(S)$.

用反证法.如果 $A'(x_0)(S)$ 不是列紧集,则 $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ 以及 $h_i \in S(i = 1,2,\cdots)$ 使

$$\| A'(x_0)h_i - A'(x_0)h_j \| \geqslant \varepsilon_0 \quad (i \neq j).$$

由 $A'(x_0)$ 的定义及 D 为开集可知,$\exists\, \tau > 0$,使当 $\| h \| \leqslant \tau$ 时,恒有 $x_0 + h \in D$,且

$$\| A(x_0 + h) - Ax_0 - A'(x_0)h \| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{3} \| h \|.$$

于是当 $i \neq j$ 时,有

$$\begin{aligned}
&\| A(x_0 + \tau h_i) - A(x_0 + \tau h_j) \| \\
&= \| [A(x_0 + \tau h_i) - Ax_0 - A'(x_0)(\tau h_i)] - [A(x_0 + \tau h_j) \\
&\quad - Ax_0 - A'(x_0)(\tau h_j)] + \tau[A'(x_0)h_i - A'(x_0)h_j] \| \\
&\geqslant \tau \| A'(x_0)h_i - A'(x_0)h_j \| - \| A(x_0 + \tau h_i) - Ax_0 \\
&\quad - A'(x_0)(\tau h_i) \| - \| A(x_0 + \tau h_j) - Ax_0 - A'(x_0)(\tau h_j) \| \\
&\geqslant \tau\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{3} \| \tau h_i \| - \frac{\varepsilon_0}{3} \| \tau h_j \| \geqslant \frac{\tau\varepsilon_0}{3}.
\end{aligned}$$

这与 A 是全连续算子矛盾. #

第二章　压缩算子方程逼近解

把一些方程的求解问题(如微分方程、积分方程、代数方程等)化归为求算子的不动点,并用逐次逼近法求此不动点,这是分析和代数中常用的一种方法.这种方法的基本思想可以追溯到牛顿求代数方程根时所用的切线法,后来,Picard 运用逐次逼近法解常微分方程.1922 年 Banach 把这个方法的基本点提炼出来,就是压缩映象原理,用度量空间以及其中的压缩算子的一些概念更一般地描述了这个办法.这种利用泛函分析来研究方程解的近似方法以及关于算子的不动点的存在性的研究,自 Banach 之后取得了不少的重要进展,并成为非线性泛函分析的主要内容.

本章则从 Banach 压缩映象原理出发,进一步探讨压缩算子方程的逼近解问题.

§2.1　Banach 压缩映象原理

定义 2.1.1　设 E 是赋范线性空间,算子 $A:E\to E$,且满足:

$$\| Ax - Ay \| \leqslant q \| x - y \| \quad (x, y \in E).$$

若 $0 < q < 1$,则称 A 为 E 上的**压缩算子**(也是**压缩映射**).

若存在点 $x^* \in E$,使 $Ax^* = x^*$,则称 x^* 为**算子 A 的不动点**,或称 x^* 为**算子方程 $Ax = x$ 的解**.

定理 2.1.1　(**Banach 压缩映象原理**):设 E 为 Banach 空间,$A:E\to E$ 为压缩算子,则 A 在 E 中必有惟一一个不动点.

压缩映象原理不仅证明了算子方程 $Ax = x$ 的解 x^* 的存在惟

一性,而且也提供了求解的方法 —— 逐次逼近法(或称迭代法):$\forall x_0 \in E$,令 $x_n = Ax_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$,则解 $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$,并且可以由

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \| Ax_0 - x_0 \| \quad (n = 1,2,\cdots)$$

给出用 $\{x_n\}$ 逼近解 x^* 的误差估计式.

关于 Banach 压缩映象原理,有如下几点注记:

注 1:一个点集经压缩算子映照后,集中任意两点的距离被缩短了,至多等于原象距离的 $q(0 < q < 1)$ 倍.

注 2:压缩算子是连续的,即对任何收敛点列 $x_n \to x_0$,必有 $Ax_n \to Ax_0$.

注 3:空间 E 的完备性条件,是为了保证算子 A 的不动点的存在性,此条件是不可少的;不动点的惟一性则是直接从算子的压缩性来的,与空间是否完备无关.

例 2.1.1 考察空间 $E = (0, +\infty)$ 到其自身的映射:

$$Tx = \alpha x \quad (0 < \alpha < 1).$$

它显然是压缩映射,但其不动点 $x^* = 0$ 却不在 $E = (0, +\infty)$ 中,即 $Tx = \alpha x(0 < \alpha < 1)$ 在 $E = (0, +\infty)$ 中没有不动点.原因是 $E = (0, +\infty)$ 不完备.

注 4:定理中压缩算子 A 可以是非线性算子.

从应用数学的观点来看,Banach 压缩映象原理并不令人完全满意.因为常见的情况是:算子 A 在整个空间 E 上并不是压缩的,而只在其子集 $M \subset E$ 上是压缩的,如果 M 是闭集,则 M 完备,A 自然在 M 中有惟一不动点 x^*.因此适当限制初值 x_0 的选择,以使迭代列 $\{x_n\}(x_n = Ax_{n-1}, n = 1,2,\cdots)$ 仍在 M 中,则必有 $x_n \to x^*$.这方面典型而又实用的结果是:球面上的压缩映象原理,它是 Banach 压缩映象原理的一种局部性质的表述,有时使用起来更方便一些.

定理 2.1.2 设 A 是 Banach 空间 E 中闭球:$\bar{S}_{(x_0,r)} = \{x \mid \| x - x_0 \| \leqslant r\}$ 上的压缩算子,又设

$$\| Ax_0 - x_0 \| \leqslant (1-q)r \quad (0 < q < 1),$$

则 A 在 $\bar{S}_{(x_0,r)}$ 中有惟一不动点.

证 只需验证 $A:\bar{S}_{(x_0,r)} \to \bar{S}_{(x_0,r)}$,即证 $A\bar{S}_{(x_0,r)} \subset \bar{S}_{(x_0,r)}$.

因为 A 是压缩算子,所以

$$\| Ax - Ax_0 \| \leqslant q \| x - x_0 \|,$$

于是对 $\forall x \in \bar{S}_{(x_0,r)}$,即

$$\| x - x_0 \| \leqslant r,$$

于是有

$$\begin{aligned} \| Ax - x_0 \| &\leqslant \| Ax - Ax_0 \| + \| Ax_0 - x_0 \| \\ &\leqslant q \| x - x_0 \| + (1-q)r \leqslant r. \end{aligned}$$

所以

$$Ax \in \bar{S}_{(x_0,r)},$$

故

$$A\bar{S}_{(x_0,r)} \subset \bar{S}_{(x_0,r)},$$

从而

$$A:\bar{S}_{(x_0,r)} \to \bar{S}_{(x_0,r)}.$$

因为 $\bar{S}_{(x_0,r)}$ 是Banach空间 E 中的闭子集,所以 $\bar{S}_{(x_0,r)}$ 为完备集,据定理 2.1.1 即知,A 在 $\bar{S}_{(x_0,r)}$ 中有惟一不动点. #

Banach 压缩映象原理有很多有用的推广形式,下面仅介绍一个比较常见的推广形式.

定理 2.1.3 设 E 为Banach空间,$A:E \to E$,若存在自然数 n,使得 A^n 是 E 上的一个压缩算子,则 A 在 E 中必有惟一的不动点.

证 当 $n = 1$ 时,定理 2.1.3 即是定理 2.1.1.

记 $B = A^n$,则 B 是 E 上的压缩算子,由定理 2.1.1,B 有不动点 x^*:$x^* = Bx^*$.下证 x^* 也是 A 的不动点.

事实上,算子 $BA = A^{n+1} = AB$,

故

$$B(Ax^*) = A(Bx^*) = Ax^*,$$

因此 Ax^* 也是 B 的不动点，由于压缩算子 A 只有一个不动点，所以必有

$$Ax^* = x^*.$$

设 $\bar{x}$ 是A 的任一不动点，由于 $A\bar{x} = \bar{x}$，则

$$A^n\bar{x} = A^{n-1}\bar{x} = \cdots = \bar{x}.$$

因此，$\bar{x}$ 也是$B = A^n$ 的不动点.

又由于 B 的不动点只有一个x^*，所以 $\bar{x} = x^*$，亦即 A 的不动点也只有一个. #

§2.2 算子的 Lipschitz 条件与 Lipschitz 常数

所谓**算子** A **的** Lipschitz **条件**是指：存在常数 $L > 0$，使 $\| Ax - Ay \| \leqslant L \| x - y \|$. 我们常常会遇到，算子 A 在空间范数意义下满足 Lipschitz 条件，但却不是压缩算子的情况. 为此，我们将讨论在空间中通过等价范数，使 A 成为压缩算子的可能性条件.

从泛函分析已经知道，当范数 $\| \cdot \|_1$ 用等价范数 $\| \cdot \|_2$ 来代替时，空间 E 中的收敛点列仍是收敛的；闭(开)集仍是闭(开)集，等等. 并且，在有限维线性空间上，任何两个范数都是等价的.

但是，如果赋范线性空间 E 是无穷维的，则确有不等价的范数存在. 例如：$C_{[a,b]}$ 空间中，范数 $\| x \|_1 = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} | x(t) |$ 与 $\| x \|_2 = \int_a^b | x(t) | \mathrm{d}t$ 是不等价的.

下面我们用两个具体的例子来说明，用等价范数使满足 Lipschitz 条件的算子成为压缩算子的可能性.

例 2.2.1 考察一阶常微分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n), \\ i = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

该方程组也可表示为向量的形式：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x).$$

其中 $x = x(t) = \{\xi_{1(t)}, \xi_{2(t)}, \cdots, \xi_{n(t)}\}$ 是取值在 n 维欧氏空间 R^n 中的向量函数.

求此方程组适合初始条件 $x(0) = 0$ 的解，就等价于求解向量积分方程：

$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s))\mathrm{d}s.$$

假设 $f(t, x)$ 是关于 t, x 的 $n+1$ 元连续函数，并且关于 x 满足 Lipschitz 条件：

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x - y| \quad (x, y \in R^n, 0 \leqslant t \leqslant r).$$

此处 $|x|$ 记 R^n 中向量 x 的长度.

定义算子：

$$A: x(t) \to \int_0^t f(s, x(s))\mathrm{d}s,$$

即非线性积分算子：

$$Ax(t) = \int_0^t f(s, x(s))\mathrm{d}s. \tag{2.2.1}$$

显然，对任何 $\tau \in [0, r]$，该算子 A 是定义在 $[0, \tau]$ 上连续向量函数空间 $C_{[0,\tau]}$ 上的自映射，即 $A: C_{[0,\tau]} \to C_{[0,\tau]}$. 空间 $C_{[0,\tau]}$ 中的范数为：

$$\| x \| = \max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} |x(t)|.$$

于是

$$\begin{aligned}\| Ax - Ay \| &= \max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} \left| \int_0^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))]\mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant Lt \max_{0 \leqslant t \leqslant \tau} |x(s) - y(s)| \\ &\leqslant L\tau \| x - y \|.\end{aligned}$$

因此，当 $L\tau < 1$ 时，算子 A 是压缩算子，且满足 Banach 压缩原理的

条件,因此常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\xi_i}{\mathrm{d}t} = f_i(t, \xi_1, \cdots, \xi_n) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

在区间 $0 \leqslant t \leqslant \min\{r, \frac{1}{L}\}$ 上有惟一一组解.

但若引进如下的等价范数,则该满足初始条件的常微分方程组在整个区间 $[0, r]$ 上有解.

对区间 $[0, r]$ 上连续向量函数空间 $C_{[0,r]}$,设其上的范数为:

$$\| x \|_* = \max_{0 \leqslant t \leqslant r} \mathrm{e}^{-L_1 t} | x(t) | \quad (x \in C_{[0,r]}, \text{常数 } L_1 > 0). \tag{2.2.2}$$

于是有:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leqslant t \leqslant r} \mathrm{e}^{-L_1 r} | x(t) | &\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant r} \mathrm{e}^{-L_1 t} | x(t) | \\ &\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant r} | x(t) | \quad (x \in C_{[0,r]}), \end{aligned}$$

即

$$\mathrm{e}^{-L_1 r} \| x \| \leqslant \| x \|_* \leqslant \| x \|.$$

故范数 $\| x \|_*$ 与 $\| x \|$ 是等价的.

又
$$\begin{aligned} \| Ax - Ay \|_* &= \max_{0 \leqslant t \leqslant r} \mathrm{e}^{-L_1 t} \left| \int_0^t [f(s, x(s)) - f(s, y(s))] \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant r} \int_0^t \mathrm{e}^{-L_1 t} L | x(s) - y(s) | \mathrm{d}s \\ &= L \max_{0 \leqslant t \leqslant r} \int_0^t \mathrm{e}^{-L_1 (t-s)} \mathrm{e}^{-L_1 s} | x(s) - y(s) | \mathrm{d}s \\ &= L \max_{0 \leqslant t \leqslant r} \int_0^t \mathrm{e}^{L_1 (s-t)} \mathrm{e}^{-L_1 s} | x(s) - y(s) | \mathrm{d}s \\ &\leqslant L \| x - y \|_* \max_{0 \leqslant t \leqslant r} \int_0^t \mathrm{e}^{L_1 (s-t)} \mathrm{d}s \\ &= \frac{L}{L_1} (1 - \mathrm{e}^{-L_1 r}) \| x - y \|_*. \end{aligned}$$

令 $L_1 = L$,则 $q = 1 - \mathrm{e}^{-Lr} < 1$,故算子(2.2.1)在范数(2.2.2)的意义下是压缩的.于是这个满足初始条件的常微分方程组对所有的

$t \in [0,r]$ 有惟一确定的解 $x^*(t)$.

例 2.2.2 设未知函数 $\varphi(x) \in C_{[0,r]}$, $k(x,y)$ 和 $f(y,\varphi)$ 对 $0 \leqslant x,y \leqslant r$, $-\infty < \varphi < +\infty$ 是两变元连续的,并且

$$|f(y,\varphi) - f(y,\psi)| \leqslant L|\varphi - \psi| \quad (-\infty < \varphi,\psi < +\infty).$$

考察多项式型 Hammerstein 非线性积分方程:

$$\varphi(x) = \int_0^x k(x,y) f(y,\varphi(y)) \mathrm{d}y = A\varphi(x). \tag{2.2.3}$$

上式的右边定义了一个在 $C_{[0,r]}$ 上的非线性积分算子 A,在范数

$$\|\varphi\|_* = \max_{0 \leqslant t \leqslant r} \mathrm{e}^{-L_1 x} \cdot |\varphi(x)| \quad (\varphi \in C_{[0,r]}, \text{且常数 } L_1 > 0)$$

意义下,它满足不等式

$$\|A\varphi - A\psi\|_* \leqslant \frac{KL}{L_1}(1 - \mathrm{e}^{-L_1 r}) \|\varphi - \psi\|_* \quad (\varphi,\psi \in C_{[0,r]}).$$

其中 $K = \max\limits_{0 \leqslant x,y \leqslant r} |k(x,y)|$.

若 $L_1 \geqslant KL$,则 A 在 $\|\cdot\|_*$ 意义下是可压缩的,据 Banach 压缩映象原理即知方程(2.2.3) 在$[0,r]$上有惟一的解.

接下来介绍 Lipschitz 常数的估算.

据数学分析中 Lagrange 中值定理知,任何一个可微的数值函数在区间$[a,b]$上均满足以 $L = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$ 为常数的 Lipschitz 条件.

若对算子也引入某种可微性,使之有上面的事实成立,进而不仅说明可微算子满足 Lipschitz条件,而且还能估算出它所具有的常数.算子的这种可微性即是前面所讲的 Fréchet 可微性. 为此,我们有:

定理 2.2.1 设 E,F 均为 Banach 空间,区域 $G \subset E$,算子 $A: G \to F$ 为 Fréchet 可微算子,则 $\forall x_0 \in G$,且 $x_0 + \Delta x \in G$,有不等

式：

$$\| A(x_0+\Delta x)-Ax_0 \| \leqslant \sup_{\bar{x}=x_0+\theta\Delta x} \| A'(\bar{x}) \| \, \| \Delta x \|$$

$$(0<\theta<1). \quad (2.2.4)$$

证 记 $y_0 = A(x_0+\Delta x) - Ax_0 \in F$，由 Hahn – Banach 定理 1.2.3 的推论知：$\exists f \in F^*$，使 $\|f\| = 1$，且

$$f(y_0) = \|y_0\| = f[A(x_0+\Delta x)] - f(Ax_0).$$

（这里已设 $A(x_0+\Delta x) - Ax_0 \neq \theta$，当 $A(x_0+\Delta x) - Ax_0 = \theta$ 时，不等式(2.2.4) 显然成立.)

令数值函数 $\varphi(\tau) = f[A(x_0+\tau\Delta x)] \quad (0<\tau<1)$，

此时

$$\|y_0\| = f(y_0) = \varphi(1) - \varphi(0).$$

由于 A 是 Fréchet 可微算子，又 $f \in F^*$，即 f 是有界线性泛函，据链锁定理 1.3.2 的系知：fA 可微，故 $\varphi(\tau)$ 是关于 τ 的可微函数，且

$$\begin{aligned}\varphi'(\tau) &= f[A'(x_0+\tau\Delta x)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(x_0+\tau\Delta x) \\ &= f[A'(x_0+\tau\Delta x)]\Delta x.\end{aligned}$$

对 $\varphi(\tau)$ 应用中值定理，$\exists\, 0<\theta<1$，使 $\varphi(1)-\varphi(0) = \varphi'(\theta)$，即

$$\begin{aligned}&\|A(x_0+\Delta x) - Ax_0\| \\ &= \|y_0\| = f(y_0) \\ &= \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta) \\ &= f[A'(x_0+\theta\Delta x)]\Delta x \\ &\leqslant \|f\| \, \|A'(x_0+\theta\Delta x)\| \, \|\Delta x\| \\ &= \|A'(x_0+\theta\Delta x)\| \, \|\Delta x\| \\ &\leqslant \sup_{\bar{x}=x_0+\theta\Delta x} \|A'(\bar{x})\| \, \|\Delta x\| \quad (0<\theta<1). \quad \#\end{aligned}$$

注：对一般的 Fréchet 可微算子 A，只能得出定理中的不等式，而中值公式：

$$A(x_0+\Delta x) - Ax_0 = A'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x \quad (0<\theta<1)$$

一般是不成立的.

反例 设算子 $A:R^2 \to R^2$ 由下式定义：

$$y = Ax, \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2),$$

$$y_1 = x_1^2 + x_2^2 = \varphi(x_1, x_2), \quad y_2 = x_1^3 = \psi(x_1, x_2).$$

考察 $\tilde{x} = (1,1) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \Delta x = (1,1) = (\Delta x_1, \Delta x_2)$. 若中值公式

$$A(\tilde{x} + \Delta x) - A\tilde{x} = A'(\tilde{x} + \theta\Delta x) \cdot \Delta x$$

成立,则据例 1.3.2 知

$$A(\tilde{x} + \Delta x) - A\tilde{x} = \Big(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\Big|_{\tilde{x}+\theta\Delta x} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\Big|_{\tilde{x}+\theta\Delta x} \cdot \Delta x_2,$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\Big|_{\tilde{x}+\theta\Delta x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\Big|_{\tilde{x}+\theta\Delta x} \cdot \Delta x_2\Big),$$

即

$$(8,8) - (2,1) = (2(1+\theta) + 2(1+\theta), 3(1+\theta)^2 + 0),$$

亦即

$$(6,7) = (4(1+\theta), 3(1+\theta)^2).$$

上式相当于方程组:$6 = 4(1+\theta), 7 = 3(1+\theta)^2$,它没有公共解,故不论 $\theta \in (0,1)$ 为何值,中值公式都不成立.

有了定理 2.2.1,对 Fréchet 可微算子 A 估算其 Lipschitz 常数就变得容易了.

设 Fréchet 可微算子 A 定义在有界凸集 G 上,则常数

$$L_0 = \sup_{x \in G} \| A'(x) \|$$

可作为 A 在 G 上的 Lipschitz **常数**.

其实,设 $x, y \in G$,则对 $\forall \theta \in (0,1)$,因 G 为凸集,故

$$y + \theta(x - y) = \theta x + (1-\theta) y \in G,$$

据定理 2.2.1 知:

$$\| Ax - Ay \| \leqslant \sup_{\tilde{x} = y + \theta(x-y)} \| A'(\tilde{x}) \| \cdot \| x - y \|$$
$$= L_0 \| x - y \| \quad (0 < \theta < 1),$$

所以

$$\| Ax - Ay \| \leqslant L_0 \| x - y \|,$$

其中

$$L_0 = \sup_{\tilde{x}=y+\theta(x-y)} \| A'(\tilde{x}) \| .$$

§2.3 谱半径与算子的压缩性

下面我们利用等价范数,对有界线性算子作一些更为深入的探讨.为此先给出谱半径的概念.

定义 2.3.1 设 E 是赋范线性空间,$A:E \to E$ 为有界线性算子,称

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| A^n \|}$$

为算子 A 的谱半径.

如此引入的谱半径的定义是有意义的,因为有下述命题:

命题:设有界线性算子 $A \in B(E,E)$,则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| A^n \|}$ 存在,且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} = \inf_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{\| A^n \|}.$$

证 记 $r(A) = \inf\limits_{n\geqslant 1} \sqrt[n]{\| A^n \|}$,

则

$$\sqrt[n]{\| A^n \|} \geqslant r(A), n = 1,2,\cdots,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} \geqslant r(A).$$

因此只需证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} \leqslant r(A)$ 即可.

由下确界的定义,对 $\forall \varepsilon > 0$,存在正整数 $m \geqslant 1$,使

$$\sqrt[m]{\| A^m \|} < r(A) + \varepsilon.$$

于是,对任何正整数 n,均存在非负整数 k_n 及 l_n,使

$$n = k_n \cdot m + l_n \quad (0 \leqslant k_n < m).$$

(此处 m 为定值,l_n 局限于$[0,m)$,故当 n 趋大时,只有 k_n 随着趋

大.)

由于

$$\| AB \| \leqslant \| A \| \; \| B \|,$$

故

$$\forall K, \| A^K \| \leqslant \| A \|^K,$$

从而

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{\| A^n \|} &= \sqrt[n]{\| A^{k_n \cdot m + l_n} \|} \\
&\leqslant \sqrt[n]{\| A^{l_n} \| \; \| A^{k_n \cdot m} \|} \\
&\leqslant (\| A \|^{l_n} \| A^m \|^{k_n})^{\frac{1}{n}} \\
&\leqslant \| A \|^{\frac{l_n}{n}} (r(A) + \varepsilon)^{\frac{m \cdot k_n}{n}}.
\end{aligned}$$

因为当 $n \to \infty$ 时,

$$\frac{l_n}{n} \to 0, \frac{k_n m}{n} \to 1,$$

所以

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} \leqslant r(A) + \varepsilon.$$

由于 $r(A)$ 为定值,ε 可充分小,故由上式得

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} \leqslant r(A).$$

所以

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} = r(A) = \inf_{n \geqslant 1} \sqrt[n]{\| A^n \|}. \quad \#$$

定理 2.3.1 若范数 $\| \cdot \|$ 与 $\| \cdot \|_*$ 等价(即 $m \| x \| \leqslant \| x \|_* \leqslant M \| x \|$),则

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|_*}$$

(即谱半径在等价范数意义下保持不变).

证 因为

$$\| Ax \|_* \leqslant M \| Ax \|,$$

$$\| x \|_* \geqslant m \| x \| \quad (\forall x \in E),$$

所以当 $x \neq \theta$ 时,

$$\frac{\| Ax \|_*}{\| x \|_*} \leqslant \frac{M}{m} \cdot \frac{\| Ax \|}{\| x \|} \leqslant \frac{M}{m} \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|}{\| x \|} = \frac{M}{m} \| A \|$$

故对算子范数,有

$$\| A \|_* = \sup_{x \neq \theta} \frac{\| Ax \|_*}{\| x \|_*} \leqslant \frac{M}{m} \| A \|.$$

同理可证

$$\| A \| \leqslant \frac{M}{m} \| A \|_*,$$

于是

$$\frac{m}{M} \| A \| \leqslant \| A \|_* \leqslant \frac{M}{m} \| A \|,$$

当然有

$$\frac{m}{M} \| A^n \| \leqslant \| A^n \|_* \leqslant \frac{M}{m} \| A^n \|,$$

从而

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{m}{M}} \cdot \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} \leqslant \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|_*}$$

$$\leqslant \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{M}{m}} \cdot \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|},$$

故

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| A^n \|_*}. \quad \#$$

因为

$$r(A) = \inf_{n \geqslant 1} \sqrt[n]{\| A^n \|},$$

所以

$$r(A) \leqslant \| A \|.$$

系:据定理 2.3.1,可以构造等价范数 $\| \cdot \|_*$,同样有:

$$r(A) \leqslant \| A \|_*.$$

证 由 $r(A) = \inf_{n \geqslant 1} \sqrt[n]{\| A^n \|}$ 知,$\forall \varepsilon > 0, \exists p \geqslant 1,$

使

$$\| A^p \| < (r(A)+\varepsilon)^p.$$

构造范数:

$$\begin{aligned}\| x \|_* = &(r(A)+\varepsilon)^{p-1}\| x \| + (r(A)+\varepsilon)^{p-2}\| Ax \| \\ &+ (r(A)+\varepsilon)^{p-3}\| A^2x \| + \cdots \\ &+ (r(A)+\varepsilon)\| A^{p-2}x \| + \| A^{p-1}x \|,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&(r(A)+\varepsilon)^{p-1}\| x \| \\ \leqslant &\| x \|_* \\ \leqslant &[(r(A)+\varepsilon)^{p-1} + (r(A)+\varepsilon)^{p-2}\| A \| \\ &+ (r(A)+\varepsilon)^{p-3}\| A^2 \| + \cdots + (r(A)+\varepsilon)\| A^{p-2} \| \\ &+ \| A^{p-1} \|]\cdot \| x \|.\end{aligned}$$

故 $\| x \|_*$ 与 $\| x \|$ 是等价范数.

因为

$$\| A^p \| < (r(A)+\varepsilon)^p,$$

而

$$\| A^px \| \leqslant \| A^p \| \, \| x \|,$$

所以

$$\begin{aligned}\| Ax \|_* = &(r(A)+\varepsilon)^{p-1}\| Ax \| + (r(A)+\varepsilon)^{p-2} \\ &\cdot \| A^2x \| + \cdots + (r(A)+\varepsilon)\| A^{p-1}x \| \\ &+ \| A^px \| \\ \leqslant &(r(A)+\varepsilon)^{p-1}\| Ax \| + (r(A) \\ &+ \varepsilon)^{p-2}\| A^2x \| + \cdots + (r(A) \\ &+ \varepsilon)\| A^{p-1}x \| + (r(A)+\varepsilon)^p\| x \| \\ = &(r(A)+\varepsilon)[(r(A)+\varepsilon)^{p-1}\| x \| \\ &+ (r(A)+\varepsilon)^{p-2}\| Ax \| + (r(A) \\ &+ \varepsilon)^{p-3}\| A^2x \| + \cdots + \| A^{p-1}x \|] \\ = &(r(A)+\varepsilon)\| x \|_*.\end{aligned}$$

因为

$$\| Ax \|_* \leqslant \| A \|_* \| x \|_*,$$

所以

$$r(A) \leqslant \| A \|_* \leqslant r(A) + \varepsilon. \quad \#$$

定理2.3.2　设$A: E \to E$是有界线性算子,则A为压缩算子的充要条件是其谱半径$r(A) < 1$.

证　必要性:设A是可压缩的,则

$$\| Ax - Ay \| \leqslant q \| x - y \|,$$

取$y = \theta$,有$\| Ax \| \leqslant q \| x \|$,

故有

$$\| A \| \leqslant q < 1,$$

从而

$$r(A) \leqslant \sqrt[n]{\| A^n \|} \leqslant \sqrt[n]{\| A \|^n} = \| A \| < 1 \quad (\forall n \in N).$$

充分性:设谱半径$r(A) < 1$,则取$\varepsilon \in (0, 1 - r(A))$,从上述范数$\| x \|_*$的构造知,存在等价范数$\| x \|_*$,使

$$\| A \|_* \leqslant r(A) + \varepsilon < 1,$$

从而

$$\begin{aligned} \| Ax - Ay \|_* &\leqslant \| A \|_* \| x - y \|_* \\ &\leqslant (r(A) + \varepsilon) \| x - y \|_*. \end{aligned}$$

因常数$0 < r(A) + \varepsilon < 1$,故$A$在范数$\| x \|_*$的意义下是压缩算子.　#

可见,判定有界线性算子是否为压缩算子,关键在于计算或估算其谱半径是否小于1.

一般来说,满足压缩条件的算子是不多的,对这类算子直接采用压缩映象原理去讨论其不动点自然是不行的,但若算子B映Banach空间E中闭集M入自己,而A是满足压缩映象原理的M上的压缩算子,且B与A可交换:$AB = BA$,则A的不动点x^*也是B的不动点.

于是若算子B本身不是压缩算子,但其某次幂是压缩算子,则

据定理 2.1.3 知，B 有惟一的不动点.

§2.4 迭代列的收敛性与收敛速度

我们继续来对压缩算子方程 $Ax = x$ 进行讨论.前面已经指出，Banach 压缩映象原理提供了求解算子方程 $Ax = x$ 的一种方法——迭代法(或称逐次逼近法).

$\forall x_0 \in M$，令 $x_n = Ax_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$，则解 $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$，并且

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \| Ax_0 - x_0 \| . \tag{2.4.1}$$

要使迭代列 $\{x_n\}$ 与方程 $Ax = x$ 的精确解 x^* 的误差不超过 $\delta > 0$，即 $\| x_n - x^* \| < \delta$，所需迭代次数为：

$$n > \frac{1}{\ln q} \cdot \ln \frac{\delta(1-q)}{\| Ax_0 - x_0 \|}.$$

估算式(2.4.1) 描述了迭代列 $\{x_n\}$ 收敛到算子方程解 x^* 的收敛速度.一般来说，此估算式是不能改进的.但对某些算子方程，添加一定的条件则可以保证更迅速地收敛.

先来考察算子方程：

$$x = Bx + f \tag{2.4.2}$$

其中 B 是定义在 Banach 空间 E 中闭集 M 上的有界线性算子，且 $B: M \to M$，f 是 M 上的一个元素.若 $\| B \| < 1$，则据 Banach 压缩映象原理知，迭代列

$$x_n = Bx_{n-1} + f \quad (n = 1,2,\cdots)$$

收敛到方程(2.4.2) 的解 x^*.特别取 $x_0 = f$ 时，

$$x_n = f + Bf + \cdots + B^n f.$$

因为

$$x_n \to x^* (n \to \infty),$$

所以

$$x^* = f + Bf + \cdots + B^n f + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} B^n f \quad (f \in M).$$

对算子方程(2.4.2)补充条件：$r(B) < 1$，则可得到比Banach压缩映象原理更深刻的定理.

定理2.4.1 设 E 为Banach空间，M 为 E 的闭子集，有界线性算子 $B: M \to M$. 若 B 的谱半径 $r(B) < 1$，则迭代列 $x_n = Bx_{n-1} + f (n = 1,2,\cdots)$ 收敛到算子方程 $x = Bx + f$ 的解 x^*，且对 $\forall \varepsilon \in (0, 1 - r(B))$，有

$$\| x_n - x^* \| \leqslant C(\varepsilon)(r(B) + \varepsilon)^n \| x_0 - Bx_0 - f \|$$

$$(C(\varepsilon) \text{ 为与 } \varepsilon \text{ 有关的正的常数}). \quad (2.4.3)$$

证 据定理2.3.2的证明过程知，对 $\forall \varepsilon \in (0, 1 - r(B))$，我们可在 E 中构造等价范数 $\| x \|_*$，使

$$m(\varepsilon) \| x \| \leqslant \| x \|_x \leqslant M(\varepsilon) \| x \| \quad (x \in E). \quad (2.4.4)$$

及 $$\| Bx \|_* \leqslant (r(B) + \varepsilon) \| x \|_* \quad (x \in E). \quad (2.4.5)$$

从(2.4.5)式得知，方程(2.4.2)可当做具压缩算子的方程 $Ax = Bx + f$，此处 A 是压缩算子，压缩系数是 $r(B) + \varepsilon < 1$. 因此算子方程(2.4.2)存在惟一解 x^*，且迭代列 $x_n = Bx_{n-1} + f$ 收敛到 x^*. 再由(2.4.5)式与(2.4.1)式可推出估算式：

$$\| x_n - x^* \|_* \leqslant \frac{(r(B) + \varepsilon)^n}{1 - r(B) - \varepsilon} \| x_0 - Bx_0 - f \|_*.$$

再由(2.4.4)式知：

$$\begin{aligned} m(\varepsilon) \| x_n - x^* \| &\leqslant \| x_n - x^* \|_* \\ &\leqslant \frac{(r(B) + \varepsilon)^n}{1 - r(B) - \varepsilon} \| x_0 - Bx_0 - f \|_* \\ &\leqslant \frac{(r(B) + \varepsilon)^n}{1 - r(B) - \varepsilon} \| x_0 - Bx_0 - f \| M(\varepsilon). \end{aligned}$$

所以

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{\frac{M(\varepsilon)}{m(\varepsilon)}}{1 - r(B) - \varepsilon}(r(B) + \varepsilon)^n \| x_0 - Bx_0 - f \|$$

$$= C(\varepsilon)(r(B) + \varepsilon)^n \| x_0 - Bx_0 - f \| . \quad \#$$

如果 $\| x_n - x^* \| \leqslant Cq^n$(常数 $C > 0, 0 < q < 1$)($n = 1,2,\cdots$),则迭代列 $\{x_n\}$ 叫做以具公比为 q 的几何级数速度收敛到解 x^*. 于是定理2.4.1可叙述成:迭代列 $x_n = Bx_{n-1} + f$ 以任意接近于 $r(B)(< 1)$ 为公比的几何级数的速度收敛到解 x^*.

特别,若 $r(B) = 0$,此时线性算子 B 称为广义幂零算子.对这类算子,估算式(2.4.3)可写成

$$\| x_n - x^* \| \leqslant C(\varepsilon)\varepsilon^n \| x_0 - Bx_0 - f \| .$$

此时迭代列以任意小的正数 ε 为公比的几何级数速度收敛到解 x^*.

对某些特殊的广义幂零算子,还能再提高迭代列 $\{x_n\}$ 的收敛速度,达到所谓的阶乘收敛速度.为此我们来考察非线性 Volterra 型积分方程:

$$x(t) = f(t) + \lambda\int_a^t k(t,s)x(t)\mathrm{d}s \quad (\lambda \text{ 为常数}). \tag{2.4.6}$$

某些数学物理问题和某些变分问题均可归结为解这种积分方程的问题.近年来在二阶椭圆形偏微分方程的研究中,Volterra 积分方程也有应用.

例2.4.1 设 $f(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数,又设核 $k(t,s)$ 当 $a \leqslant t, s \leqslant b$ 时连续,对常数 $\lambda = 1$ 时的 Volterra 积分算子:

$$Ax(t) = \int_a^t k(t,s)x(t)\mathrm{d}s + f(t). \tag{2.4.7}$$

显然

$$A: C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}.$$

对于积分算子:

$$Bx(t) = \int_a^t k(t,s)x(s)\mathrm{d}s \quad x \in C_{[a,b]}.$$

易知，$B: C_{[a,b]} \to C_{[a,b]}$ 且 B 是广义幂零算子，即谱半径 $r(B) = 0 < 1$.

因此对连续函数 $f(t)$，算子方程

$$x = Bx + f$$

有惟一解 $x^*(t)$，且迭代

$$x_{n+1}(t) = \int_a^t k(t,s)x_n(s)\mathrm{d}s + f(t) \tag{2.4.8}$$

收敛到 $x^*(t)$.

令

$$\delta_n(t) = | x_n(t) - x^*(t) |,$$

则

$$\delta_n(t) \leqslant M\int_a^t \delta_{n-1}(s)\mathrm{d}s \quad (M = \| \max_{a\leqslant t,s\leqslant b} | k(t,s) |).$$

现用归纳法证明：

当 $t \in [a,b]$ 时，

$$\delta_n(t) \leqslant M^n \frac{(t-a)^n}{n!} \max_{a\leqslant t\leqslant b}\delta_0(t). \tag{2.4.9}$$

当 $n = 1$ 时，显然有：

$$\delta_1(t) \leqslant M(t-a) \max_{a\leqslant t\leqslant b}\delta_0(t).$$

设(2.4.9)式对于 n 成立，现在来推出对于 $n+1$，(2.4.9)式也成立. 事实上：

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1}(t) &= | x_{n+1}(t) - x^*(t) | = \left| \int_a^t k(t,s)[x_n(s) - x^*(s)]\mathrm{d}s \right| \\
&\leqslant \int_a^t | k(t,s) | \cdot | x_n(s) - x^*(s) | \mathrm{d}s \\
&\leqslant M\int_a^t \delta_n(s)\mathrm{d}s \leqslant M\int_a^t M^n \frac{(s-a)^n}{n!} \max_{a\leqslant s\leqslant b}\delta_0(s)\mathrm{d}s \\
&= \frac{M^{n+1}}{n!} \max_{a\leqslant t\leqslant b}\delta_0(t)\int_a^t (s-a)^n\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$= M^{n+1}\frac{(t-a)^{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\delta_0(t).$$

从而

$$\| x_n - x^* \| = \max_{a\leqslant t\leqslant b}\delta_n(t)\leqslant C\cdot\frac{M^n(b-a)^n}{n!}. \tag{2.4.10}$$

此处 $C=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\delta_0(t)$ 为常数.

估算式(2.4.10) 说明迭代(2.4.8) 以比任何几何级数速度更快的阶乘速度收敛到解 x^*. 当(2.4.10) 式成立时,收敛称做阶乘收敛.

以后我们还将更进一步考察非线性算子方程 $Ax=x$(此处 A 为非线性算子) 逼近解的收敛速度问题. 此算子方程可以有不止一个解 x^*,对充分接近解 x^* 的初始元 x_0,再附加一些条件,迭代列 $\{x_n\}$ 可收敛到解 x^*,并且有类似于线性算子方程的误差估计式(2.4.3).

§2.5 收缩算子的不动点

本节主要讨论并非压缩算子的所谓收缩算子的不动点问题. 一般来说,收缩算子的不动点的存在性难以保证,但如果它存在不动点,则必定是惟一的.

定义 2.5.1 设 A 是定义在赋范线性空间 E 上的一个算子,如果

$$\| Ax - Ay \| < \| x - y \| \quad (x,y\in E, x\neq y),$$

则称 A 为**收缩算子**.

要使收缩算子存在不动点, 一般要附加比较严格的条件. Edelstein 于 1961 年提出了如下著名的不动点定理:非空紧度量空间 E 到其自身内任一收缩算子 A 有惟一不动点. 其实,从该定理的证明过程可以发现,收缩算子 A 的被映射集的紧性条件可以去掉,只须

保证算子 A 的象集为紧集就可以了，而这一条件的减弱，却是比较实质地改进了这一定理.

定理2.5.1 设 E 是一实赋范线性空间，M 为 E 中的一个紧子集，若收缩算子 A 映 E 入 M，则 A 在 E 中存在惟一的不动点.

证 易证收缩算子 A 是连续的.

事实上，对任何收敛点列 $x_n \to x_0$，由于

$$\| Ax_n - Ax_0 \| < \| x_n - x_0 \|,$$

故当 $n \to \infty$，$\| x_n - x_0 \| \to 0$ 时，必有

$$\| Ax_n - Ax_0 \| \to 0.$$

再在 E 的紧子集 M 上定义泛函：

$$\varphi(x) = \| x - Ax \| \quad (x \in M \subset E)$$

来证 $\varphi(x)$ 连续.

从范数的三角不等式易知：

$$| \|x\| - \|y\| | \leqslant \| x - y \|,$$

于是

$$\begin{aligned} | \varphi(x_n) - \varphi(x_0) | &= | \| x_n - Ax_n \| - \| x_0 - Ax_0 \| | \\ &\leqslant \| (x_n - Ax_n) - (x_0 - Ax_0) \| \\ &\leqslant \| x_n - x_0 \| + \| Ax_n - Ax_0 \|, \end{aligned}$$

因此，当 $x_n \to x_0 (n \to \infty)$ 时，有

$$\| x_n - x_0 \| \to 0, \quad \| Ax_n - Ax_0 \| \to 0,$$

从而有

$$| \varphi(x_n) - \varphi(x_0) | \to 0 (n \to \infty),$$

故 $\varphi(x)$ 在 M 上连续.

由于 $M \subset E$ 是紧集，据定理1.1.1知，定义在 M 上的实连续泛函 $\varphi(x)$ 可达下确界. 于是 $\exists x^* \in M$，使

$$\varphi(x^*) = \inf_{x \in M} \varphi(x).$$

可证明 x^* 即是 A 的不动点. 若不然，即 $Ax^* \neq x^*$，则

$$\varphi(Ax^*) = \| Ax^* - A(Ax^*) \|$$

$$< \| x^* - Ax^* \| = \varphi(x^*).$$

这与 $\varphi(x^*)$ 为下确界的含义矛盾,故 $Ax^* = x^*$.

下证不动点是惟一的.

设 y^* 是 A 的另一不动点:$y^* \neq x^*, Ax^* = x^*, Ay^* = y^*$,那么

$$\| x^* - y^* \| = \| Ax^* - Ay^* \| < \| x^* - y^* \|,$$

当然这是矛盾的,所以 $x^* = y^*$.

因此收缩算子 A 在 E 中有惟一不动点.

注 1:定理中 AE 为 E 的紧子集的条件不能少.

反例 对于空间 $E = [1, +\infty)$,算子

$$Ax = x + \frac{1}{x}$$

有 $AE = [2, +\infty) \subset E$,以直线上通常的距离来引入范数,则有:

$$\begin{aligned} \| Ax - Ay \| &= | Ax - Ay | = | x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} | \\ &= | 1 - \frac{1}{xy} | \cdot | x - y | < | x - y | \\ &= \| x - y \| \quad (x, y \in E, 且\ x \neq y), \end{aligned}$$

故 A 是收缩算子,但 A 在 E 中没有不动点. 因为若 A 在 E 中有不动点 x',则 $Ax' = x' + \frac{1}{x'} = x'$,可得 $\frac{1}{x'} = 0$,与 x' 为 E 中的一个数矛盾. 出现这种情况的原因就是由于 A 的象集 $AE = [2, +\infty)$ 不是 E 中的紧集.

注 2:满足定理条件的收缩算子未必是压缩算子.

反例 取 $E = [0,1]$,算子取为

$$Ax = x - \frac{x^2}{2},$$

则 $AE = [0, \frac{1}{2}] \subset E$,且

$$\| Ax - Ay \| = | x - \frac{x^2}{2} - y + \frac{y^2}{2} |$$

$$= |1 - \frac{x+y}{2}| \cdot |x-y| < |x-y|$$
$$= \| x - y \| \quad (x, y \in E, x \neq y).$$

故 A 是收缩算子. 又 $AE = [0, \frac{1}{2}]$ 是 R^1 中的有界闭集, 从而是紧集, 因此 A 满足定理的条件, 故 A 在 E 中有惟一不动点 $x = 0$. 但 A 并非压缩算子, 即对无论怎样的 $\alpha \in (0,1)$, 都可相应地取点 $x = 0$, $y = 1 - \alpha$, 使

$$|Ax - Ay| = |1 - \frac{x+y}{2}| \cdot |x-y|$$
$$= (1 - \frac{1-\alpha}{2}) \cdot |x-y|$$
$$= \frac{1+\alpha}{2} |x-y|$$
$$> \frac{\alpha+\alpha}{2} |x-y|$$
$$= \alpha |x-y|.$$

所以 A 不是压缩算子.

利用定理 2.5.1 可以很简便地证明下述定理:

定理 2.5.2 设 F 是 n 维欧几里得空间 R^n 中的有界闭集, A 是 F 到自身中的收缩算子, 则 A 在 F 中存在惟一不动点.

证 因为 F 是 R^n 中的有界闭集, 从而是紧集且显然是非空的, 又收缩算子 $A: F \to F$, 据定理 2.5.1 即知 A 在 F 中存在惟一的不动点. #

§2.6 一致压缩算子与隐函数定理

最后, 我们来介绍一致压缩算子的概念及有关的性质, 并指出它在隐函数定理中的应用.

定义 2.6.1 设 E, F 均为 Banach 空间, 闭球 $\bar{T} = \{x \mid \|x - x_0\| \leqslant \beta\} \subset E$, 闭球 $\bar{S} = \{z \mid \|z - z_0\| \leqslant \alpha\} \subset F$, $A(x, z)$ 是

依赖于参变量 $z \in \bar{S}$ 定义在空间 E 中的算子，若对所有的 $z \in \bar{S}$，有

$$\| A(x,z) - A(y,z) \| \leqslant q \| x - y \| \quad (x, y \in \bar{T})$$

其中 $0 < q < 1$，q 与 z 无关，则称 $A(x,z)$ 是 E 上的**一致压缩算子**.

从定义可知，对任意固定的 $z_0 \in \bar{S}$，若 $A(x,z)$ 是一致压缩算子，且 $A(x,z_0): \bar{T} \to \bar{T}$，则 $A(x,z_0)$ 必为 $\bar{T}$ 上的压缩算子，由 Banach 压缩映象原理知，算子方程 $x = A(x,z_0)$ 在 $\bar{T}$ 中有惟一解 $x_* = x_{*(z)}$，亦即 $\exists x_* = x_*(z) \in \bar{T}$，使得：$x_* = A(x_*, z_0)$.

定义 2.6.2 若由 $z_n \xrightarrow{\text{弱}} z_0 (n \to \infty)$ 可推出 $\| x(z_n) - x(z_0) \|_E \to 0 (n \to \infty)$，则称 $x(z)$ 是**强连续的**.

定义 2.6.3 称定义在 $\bar{S}$ 上，取值于 $\bar{T}$ 中的函数 $x(z)$ 是有界的，是指对 $\forall z \in \bar{S}$，$\exists$ 常数 $c > 0$，使 $\| x(z) \|_E \leqslant c$.

下面我们来讨论一致压缩算子方程解的连续性. 为此有：

定理 2.6.1 设对每一固定的 $x \in \bar{T}$，一致压缩算子 $A(x,z)$ 关于 z 是连续的，则算子方程 $x = A(x,z)$ 的解 $x_*(z)$ 也是关于 z 连续的.

证 因为 $x_*(z)$ 是算子方程 $x = A(x,z)$ 的解，且 $A(x,z)$ 是一致压缩算子，所以

$$\begin{aligned}
&\| x_*(z) - x_*(z_0) \| \\
=& \| A(x_*(z), z) - A(x_*(z_0), z_0) \| \\
\leqslant& \| A(x_*(z), z) - A(x_*(z_0), z) \| + \| A(x_*(z_0), z) \\
&- A(x_*(z_0), z_0) \| \\
\leqslant& q \| x_*(z) - x_*(z_0) \| + \| A(x_*(z_0), z) - A(x_*(z_0), z_0) \|.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\| x_*(z) - x_*(z_0) \| \\
\leqslant& \frac{1}{1-q} \| A(x_*(z_0), z) - A(x_*(z_0), z_0) \|.
\end{aligned}$$

因为算子 $A(x,z)$ 关于 z 是连续的，所以当 $z \to z_0 (n \to \infty)$ 时，

$$\| A(x_*(z_0), z) - A(x_*(z_0), z_0) \| \to 0 (n \to \infty),$$

从而

$$\| x_*(z) - x_*(z_0) \| \to 0 (n \to \infty),$$

即 $x_*(z)$ 关于 z 是连续的. #

再进一步来考察一致压缩算子方程解的强连续性,则有:

定理 2.6.2 若一致压缩算子 $A(x, z)$ 满足如下条件:当 $z_n \xrightarrow{\text{弱}} z_0$,且 $\| x_n(z) - x_0(z) \|_E \to 0$ 时,有 $\| A(x_n, z_n) - A(x_0, z_0) \|_E \to 0$,则解 $x_*(z)$ 是强连续的.

证 取 $H = \{x(z) \mid z \in \bar{S}, x(z) \in \bar{T}$,且 $x(z)$ 有界$\}$,并定义其元素间的运算为线性运算.现引入范数:

$$\| x \|_H = \sup_{z \in S} \| x(z) \|_E,$$

于是在此范数意义下,H 为 Banach 空间,又设 Ω 是 H 中全体有界强连续函数之集.显然 Ω 非空,且在范数 $\| \cdot \|_H$ 意义下,Ω 是 H 中的闭集.

事实上,设$\{x_n(z)\} \subset \Omega$,且 $\| x_n(z) - x_0(z) \|_H \to 0 (n \to \infty)$,由 $x_n(z)$ 的有界性可推知 $x_0(z)$ 也有界.其实,对 $\varepsilon = 1$,存在正整数 N,使

$$\| x_0(z) - x_N(z) \|_H < \varepsilon = 1.$$

于是

$$\| x_0(z) \|_H \leqslant \| x_N(z) \|_H + 1,$$

故 $x_0(z)$ 有界.

又由题设 $z_n \xrightarrow{\text{弱}} z_0 (n \to \infty)$,故有:

$$\begin{aligned} & \| x_0(z_n) - x_0(z_0) \|_E \\ \leqslant & \| x_0(z_n) - x_m(z_n) \|_E + \| x_m(z_n) - x_m(z_0) \|_E \\ & + \| x_m(z_0) - x_0(z_0) \|_E. \end{aligned}$$

由于

$$\| x_m(z) - x_0(z) \|_H \to 0 (m \to \infty),$$

故对 $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$,当 $m \geqslant M$ 时,对任一 $z \in S$,有

$$\| x_m(z) - x_0(z) \|_H < \frac{\varepsilon}{3},$$

从而更有

$$\| x_m(z) - x_0(z) \|_E < \frac{\varepsilon}{3},$$

于是

$$\| x_0(z_n) - x_m(z_n) \|_E < \frac{\varepsilon}{3}, \| x_m(z_0) - x_0(z_0) \|_E < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对于这个 ε 及 m,由于 $x_m(z)$ 强连续,故 $\exists N > 0$,当 $n \geqslant N$ 时,

$$\| x_m(z_n) - x_m(z_0) \|_E < \frac{\varepsilon}{3}.$$

综上所述,对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n \geqslant N$ 时,选取适当的 m,可得到:

$$\| x_0(z_n) - x_0(z_0) \|_E < \varepsilon,$$

故 $x_0(z)$ 强连续,从而 $x_0(z) \in \Omega$,故 Ω 是闭集.

考察 $\tilde{A}:\tilde{A}x(z) = A(x(z), z)$,据题设,当 $x(z)$ 为强连续时,$\tilde{A}x(z)$ 也强连续,故 $\tilde{A}$ 映 Ω 入 Ω,即 $\tilde{A}:\Omega \to \Omega$.

因为

$$\begin{aligned} & \| \tilde{A}x_1(z) - \tilde{A}x_2(z) \|_H \\ = & \sup_{z \in S} \| A(x_1(z), z) - A(x_2(z), z) \|_E \\ \leqslant & q \cdot \sup_{z \in S} \| x_1(z) - x_2(z) \|_E \\ = & q \| x_1(z) - x_2(z) \|_H, \end{aligned}$$

其中 $0 < q < 1$,故 $\tilde{A}$ 为 Ω 上的压缩算子,又因为 Ω 是 Banach 空间 H 中的有界闭集,从而完备,据压缩映象原理知,$\tilde{A}$ 在 Ω 中有惟一不动点 $x_*(z)$,即 $x_*(z) = A(x_*(z), z) \in \Omega$. 因此 $x_*(z)$ 是强连续的. #

类似可证得如下命题:

命题 1:若一致压缩算子 $A(x, z)$ 是两变元弱连续的(即由 z_n

$\xrightarrow{弱} z_0, x_n \xrightarrow{弱} x_0$,可推得 $A(x_n, z_n) \xrightarrow{弱} A(x_0, z_0)$),则方程 $x = A(x, z)$ 的解 $x_*(z)$ 也是弱连续的.

命题2:若一致压缩算子 $A(x,z)$ 有如下性质:当 $\| z_n - z_0 \| \to 0, x_n \xrightarrow{弱} x_0$ 时,有 $A(x_n, z_n) \xrightarrow{弱} A(x_0, z_0)$,则解 $x_*(z)$ 是弱连续的,即由 $\| z_n - z_0 \|_E \to 0$ 可推出 $x_*(z_n) \xrightarrow{弱} x_*(z_0)$.

作为一致压缩算子的应用,我们来证明 Banach 空间中的局部隐函数定理.

设 E_1, E_2, E_3 是 Banach 空间,Ω 是乘积空间 $E_1 \times E_2$ 中某开集.设 $F: \Omega \to E_3$,考察方程:

$$F(x, z) = 0. \tag{2.6.1}$$

设$(x_0, z_0) \in \Omega$,使 $F(x_0, z_0) = 0$.

在什么条件下,在初值(x_0, z_0)附近,由方程 $F(x,z) = 0$ 可惟一确定 x 为 z 的算子 $x = x_*(z)$,即在什么条件下,当 x 在 x_0 附近时,方程 $F(x,z) = 0$ 在 z_0 附近具有惟一的解.

定理 2.6.3 (局部隐函数定理) 设算子 $F(x,z)$ 满足:

(1) $F(x_0, z_0) = 0$,且 $F(x,z)$ 在点(x_0, z_0)的某邻域内关于 x, z 两变元连续;

(2) 它对 x 的偏导算子(Fréchet 导算子) $F'_x(x,z)$ 存在,并且 $F'_x(x,z)$ 在点(x_0, z_0)处依算子范数连续;

(3) 线性算子 $F'_x(x_0, z_0): E_2 \to E_3$ 具有连续的逆.则 $\exists r > 0, \tau > 0$,使当 $\| z - z_0 \| < r$ 时,方程 $F(x,z) = 0$ 在 $\| x - x_0 \| < \tau$ 内具有惟一解 $x = x_*(z)$,且 $x_0 = x_*(z_0)$,$x_*(z)$ 在球 $\| z - z_0 \| < r$ 内连续.

证 由(3)线性算子 $F'_x(x_0, z_0)$ 有连续的逆,故$[F'_x(x_0, z_0)]^{-1}$有界,从而 $\exists M > 0$,使得 $\| [F'_x(x_0, z_0)]^{-1} \| \leqslant M$,不妨取 $\| [F'_x(x_0, z_0)]^{-1} \| = M$.

又由(2) $F_x{}'(x,z)$ 在点(x_0, z_0)的某邻域内连续,故 $\exists \delta > 0, \tau$

> 0,使当 $\| z - z_0 \| \leqslant \delta$, $\| x - x_0 \| \leqslant \tau$ 时,有:

$$\| F_x{}'(x,z) - F_x{}'(x_0,z_0) \| < \frac{1}{2M}. \qquad (2.6.2)$$

又由 $F(x_0,z)$ 的连续性知,$\exists 0 < r \leqslant \delta$,使当 $\| z - z_0 \| < r$ 时,恒有:

$$\begin{aligned} \| F(x_0,z) \| &= \| F(x_0,z) - 0 \| \\ &= \| F(x_0,z) - F(x_0,z_0) \| \\ &\leqslant \frac{\tau}{2M}. \end{aligned} \qquad (2.6.3)$$

设 z 满足 $\| z - z_0 \| < r$,并把 z 固定,令

$$A(x,z) = x - [F_x{}'(x_0,z_0)]^{-1}F(x,z),$$

于是方程 $F(x,z) = 0$ 的解 x 等价于 A 在 E_2 中的不动点.故只需证明 A 在球 $\| x - x_0 \| < \tau$ 中具有惟一不动点.

由(2.6.2)式可知,当 $\| x - x_0 \| \leqslant \tau$ 时,有

$$\begin{aligned} \| A_x{}'(x,z) \| &= \| I - [F_x{}'(x_0,z_0)]^{-1}F_x{}'(x,z) \| \\ &\leqslant \| [F_x{}'(x_0,z_0)]^{-1} \| \cdot \| F_x{}'(x_0,z_0) - F_x{}'(x,z) \| \\ &< M \cdot \frac{1}{2M} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

于是,由定理2.2.1知,当 $\| x - x_0 \| \leqslant \tau$, $\| y - x_0 \| \leqslant \tau$ 时,恒有:

$$\begin{aligned} \| A(x,z) - A(y,z) \| &\leqslant \| A_x{}'(x + \theta(y - x),z)(x - y) \| \\ &\leqslant \| A_x{}'(x + \theta(y - x),z) \| \cdot \| x - y \| \\ &\leqslant \frac{1}{2} \| x - y \| \quad (\text{其中 } 0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

故 A 是一致压缩算子,此时 $0 < q = \dfrac{1}{2} < 1$.

又当 $\| x - x_0 \| \leqslant \tau$ 时,有

$$\begin{aligned} & \| A(x,z) - x_0 \| \\ \leqslant & \| A(x,z) - A(x_0,z) \| + \| A(x_0,z) - x_0 \| \\ = & \| A(x,z) - A(x_0,z) \| + \| [F'_x(x_0,z_0)]^{-1} \cdot F(x_0,z) \| \\ < & \frac{1}{2} \| x - x_0 \| + M \cdot \frac{\tau}{2M} \leqslant \tau. \end{aligned}$$

故 A 将闭球 $\|x-x_0\| \leqslant \tau$ 映入开球 $\|x-x_0\| < \tau$(对任意固定的 z),据压缩映象原理知,一致压缩算子 A 在 $\|x-x_0\| \leqslant \tau$ 中具有惟一的不动点 $x = x_*(z)$,且此不动点在开球 $\|x-x_0\| < \tau$ 中.

由于 $F(x,z)$ 在点(x_0,z_0) 的某邻域内关于 x,z 两变元连续,故一致压缩算子 $A(x,z) = x - [F_x'(x_0,z_0)]^{-1} \cdot F(x,z)$ 也是关于 x,z 两变元连续的,据定理 2.6.1 即知惟一的解 $x_*(z)$ 在球 $\|z - z_0\| < r$ 内连续. #

第三章　半序 Banach 空间

许多实际学科中引出的问题,如一些具体的微分方程和积分方程往往只有非负解或正解才有物理意义.因此寻求算子方程的非负解或正解问题的讨论十分必要.算子方程的非负解是由 Banach 空间 E 的半序“$\leqslant$”来描述的,为此必须在 Banach 空间 E 中加进序结构.而空间的序结构通常用正锥来描述,即在 Banach 空间 E 上引入正锥 P,用锥 P 引入半序,算子 A 限制在锥 P 上研究,就可以利用锥 P 和半序来讨论算子,如增算子、凹凸算子等等,从而得出许多不动点定理.

本章先来讨论锥与半序的一般理论.

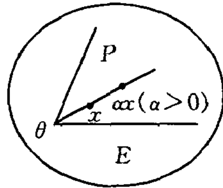
§3.1　锥与半序

定义 3.1.1　设 E 是实 Banach 空间,P 是 E 中的闭凸子集,如果它满足:

(1) 包含过点 x 的射线:若 $x\in P,\lambda\geqslant 0$,则 $\lambda x\in P$;

(2) 不含对称点:若 $x\in P,-x\in P$,则 $x=\theta$(θ 表示 E 中的零元素).

则称 P 是 E 中的**闭锥**(或**正锥**).



用 P° 表 P 的内点集,若 $P^\circ\neq\varnothing$,则称 P 是一个**体锥**.

定义 3.1.2　设 X 是一个集合,若 X 中某些元素对之间可以建

立一种关系,记为“$\leqslant$”,满足:

(1)$x \leqslant x$(自反性);

(2)$x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$(传递性);

(3)$x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y$(等价性).

则称 X 为**半序集**,或称 X 为**半序空间**.

注:这里不要求全体元素对都满足上述关系,否则称为**全序集**.

我们不讨论一般的半序集,而是要讨论有序 Banach 空间,即 E 既是 Banach 空间,又是半序集.为此有:

定义 3.1.3 给定 Banach 空间 E 中一个锥 P 后,则可规定 E 中部分元素之间的半序关系如下:

$$x \leqslant y (x, y \in E) \text{ 是指 } y - x \in P.$$

此时称 E 是由**锥 P 产生的半序 Banach 空间**.

若 $x \leqslant y, x \neq y$,则记 $x < y$;若 $y - x \in P^{\circ}$(即 P 是体锥),则记 $x << y$.

如此引入的序关系与线性关系相适应(线性序),又与极限关系相适应(连续序),即有:

定理 3.1.1 设 E 是实 Banach 空间,P 是 E 中的闭锥,则由锥 P 引入的半序关系 $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x \in P$ 满足:

(1)E 是半序集,即

$$x \leqslant x;$$
$$x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z;$$
$$x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y.$$

(2) 线性序,即

$$x \leqslant u, y \leqslant v \Rightarrow x + y \leqslant u + v;$$
$$x \leqslant y, \lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \leqslant \lambda y.$$

(3) 连续序,即

$$x_n \leqslant y_n, x_n \to x, y_n \to y, \text{导出 } x \leqslant y.$$

反之,如果 Banach 空间 E 中又赋予了线性连续半序,令 $P = \{x \mid x \geqslant \theta, x \in E\}$,则 P 是 E 中的闭锥.

证 只证(3),其他容易验证.

其实由 $x_n \leqslant y_n(n=1,2,\cdots)$ 知 $y_n - x_n \in P$,由于 P 为闭集,故 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) \in P$,即 $y - x \in P$,从而 $x \leqslant y$. #

这样,闭锥与半序是互相对应的,所以为了方便,我们有时利用闭锥,有时利用半序来考虑问题.

例 3.1.1 在连续函数空间 $C_{[a,b]}$ 中,令

$$P = \{x \mid x(t) \geqslant 0, \forall t \in [a,b], x \in C_{[a,b]}\},$$

则 P 是 $C_{[a,b]}$ 中的闭锥.

§3.2 空间 E_{u_0} 与 u_0 - 范数

本节总设 E 为具锥 P 的 Banach 空间.

定理 3.2.1 设定点 $\theta \neq u_0 \in P$(即 $u_0 > \theta$),$x_0 \in E$,则如下形式的点集 $x = tu_0 - x_0(-\infty < t < +\infty)$ 必定不全属于锥 P.

证 若不然,设 $\forall t \in (-\infty, +\infty)$,有

$$x = tu_0 - x_0 \in P.$$

当 $t = 0$ 时,因为 $x_0 \in E$,

此时

$$x = tu_0 - x_0 = - x_0,$$

未必属于 P;

当 $t \neq 0$ 时,因为

$$x = tu_0 - x_0 = |t| \cdot \mathrm{sign}t \cdot u_0 - x_0 = |t|(\mathrm{sign}t \cdot u_0 - \frac{x_0}{|t|}),$$

由锥的条件(1)知,对 $\lambda = \frac{1}{|t|} > 0$,有

$$\lambda x = \frac{1}{|t|}[|t|(\mathrm{sign}t \cdot u_0 - \frac{x_0}{|t|})] = \mathrm{sign}t \cdot u_0 - \frac{x_0}{|t|} \in P,$$

于是让 $t \to +\infty$,得 $u_0 \in P$,又让 $t \to -\infty$,得 $-u_0 \in P$,

由锥的条件(2)知,

$$u_0 = \theta,$$

与假设 $u_0 \neq \theta$ 矛盾.

故点集 $x = tu_0 - x_0(-\infty < t < +\infty)$ 不全在锥 P 中. #

定理 3.2.2 设 $\theta \neq u_0 \in P, x \in E$,若有实数 t_0,使得 $x \leqslant t_0 u_0$,则必有一个最小的实数 t_1,使得 $x \leqslant t_1 u_0$;又若 $x \geqslant -t_0 u_0$,则必有最小的实数 t_2,使得 $x \geqslant -t_2 u_0$.

证 首先,由定理 3.2.1 知,点集 $tu_0 - x$ 不会对全体实数 t 都有

$$tu_0 - x \in P.$$

其次,若有 $x \leqslant t_0 u_0$,即

$$t_0 u_0 - x \in P,$$

则对任何实数 $r > t_0$,均有 $x \leqslant ru_0$,即

$$ru_0 - x \in P.$$

因此,凡使 $x \leqslant tu_0$ 成立的 t 的集合必定下方有界,从而有下确界,记为 t_1,于是可在该集合内选出点列 $t_n \to t_1$,因 t_n 属于该集合,故对每个 n,有

$$x \leqslant t_n u_0,$$

对该式两边取极限,由连续序的性质得 $x \leqslant t_1 u_0$.

又若

$$x \geqslant -t_0 u_0,$$

则

$$-x \leqslant t_0 u_0,$$

因为 E 为 Banach 空间,所以

$$-x \in E.$$

由上述证明知,存在最小的实数 t_2,使

$$-x \leqslant t_2 u_0,$$

从而

$$x \geqslant -t_2 u_0. \quad \#$$

定义 3.2.1　设 P 是 Banach 空间 E 中的某锥，设 $u_0 \in P, u_0 \neq \theta$（即 $u_0 > \theta$），令 $E_{u_0} = \{x \mid x \in E$，且存在 $t_1, t_2 \geqslant 0$，使 $-t_1 u_0 \leqslant x \leqslant t_2 u_0\}$.

显然 $E_{u_0} \neq \varnothing$，因为总有 $\theta \in E_{u_0}$.

对 E_{u_0} 定义中的 $-t_1 u_0 \leqslant x \leqslant t_2 u_0$，据定理 3.2.2 知，必有数集 $\{t_1\}$ 的下确界，记为 $\alpha(x)$，及数集 $\{t_2\}$ 的下确界，记为 $\beta(x)$，使满足不等式：

$$-\alpha(x)u_0 \leqslant x \leqslant \beta(x)u_0 \tag{3.2.1}$$

易知，E_{u_0} 为线性空间.

事实上，由定理 3.1.1(2) 知，若 $x \in E_{u_0}$，对任一数 λ，可推出 $\lambda x \in E_{u_0}$，由 $x, y \in E_{u_0}$ 可推知，$x + y \in E_{u_0}$.

若在 E_{u_0} 中引入范数，则 E_{u_0} 即成赋范线性空间.

定义 3.2.2　设 $x \in E_{u_0}$，令

$$\| x \|_{u_0} = \max\{\alpha(x), \beta(x)\},$$

则称 $\| x \|_{u_0}$ 为 x 的 u_0 − **范数**.

下面来验证 u_0 − 范数 $\| \cdot \|_{u_0}$ 确实是范数.

(1) 非负性：$\| x \|_{u_0} \geqslant 0$，显然. 又

$$\| x \|_{u_0} = \max\{\alpha(x), \beta(x)\} = 0 \Leftrightarrow \alpha(x) = \beta(x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta;$$

(2) 正齐性：$x \in E_{u_0} \Rightarrow -\alpha(x)u_0 \leqslant x \leqslant \beta(x)u_0$

故有：

$$-\| x \|_{u_0} \cdot u_0 \leqslant x \leqslant \| x \|_{u_0} \cdot u_0. \tag{3.2.2}$$

又由 $\lambda x \in E_{u_0}$ 知：

$$-\| \lambda x \|_{u_0} \cdot u_0 \leqslant \lambda x \leqslant \| \lambda x \|_{u_0} \cdot u_0. \tag{3.2.3}$$

以 λ 乘(3.2.2) 式得

$$-\lambda \| x \|_{u_0} \cdot u_0 \leqslant \lambda x \leqslant \lambda \| x \|_{u_0} \cdot u_0.$$

又因为

$$-\alpha(\lambda x)u_0 \leqslant \lambda x \leqslant \beta(\lambda x)u_0,$$

所以

$$\beta(\lambda x) \leqslant \lambda \| x \|_{u_0}, \quad \alpha(\lambda x) \leqslant \lambda \| x \|_{u_0},$$

故

$$\| \lambda x \|_{u_0} \leqslant \lambda \| x \|_{u_0}. \tag{3.2.4}$$

① 设 $\lambda > 0$,则由(3.2.3) 式得

$$-\frac{\| \lambda x \|_{u_0}}{\lambda} \cdot u_0 \leqslant x \leqslant \frac{\| \lambda x \|_{u_0}}{\lambda} \cdot u_0.$$

因为 $x \in E_{u_0}$,所以

$$-\alpha(x)u_0 \leqslant x \leqslant \beta(x)u_0,$$

故

$$\beta(x) \leqslant \frac{\| \lambda x \|_{u_0}}{\lambda}, \alpha(x) \leqslant \frac{\| \lambda x \|_{u_0}}{\lambda},$$

因此

$$\| x \|_{u_0} \leqslant \frac{\| \lambda x \|_{u_0}}{\lambda}. \tag{3.2.5}$$

结合(3.2.4) 式与(3.2.5) 式得

$$\| \lambda x \|_{u_0} = \lambda \| x \|_{u_0}.$$

② 当 $\lambda < 0$ 时,类似可证得 $\| \lambda x \|_{u_0} = | \lambda | \ \| x \|_{u_0}$.

③ 当 $\lambda = 0$ 时,结论显然成立.

(3) 三角不等式:设 $x, y \in E_{u_0}$,则有

$$-\alpha(x)u_0 \leqslant x \leqslant \beta(x)u_0,$$
$$-\alpha(x)u_0 \leqslant y \leqslant \beta(y)u_0.$$

由定理 3.1.1(2) 知:

$$-[\alpha(x) + \alpha(y)]u_0 \leqslant x + y \leqslant [\beta(x) + \beta(y)]u_0, \tag{3.2.6}$$

因此对 $x + y \in E_{u_0}$,有

$$\alpha(x+y),\beta(x+y)\geqslant 0,$$

使

$$-\alpha(x+y)u_0\leqslant x+y\leqslant \beta(x+y)u_0. \qquad (3.2.7)$$

比较(3.2.6)与(3.2.7)式得

$$\alpha(x+y)\leqslant \alpha(x)+\alpha(y),$$
$$\beta(x+y)\leqslant \beta(x)+\beta(y),$$

从而

$$\begin{aligned}\|x+y\|_{u_0} &= \max\{\alpha(x+y),\beta(x+y)\}\\ &\leqslant \max\{\alpha(x)+\alpha(y),\beta(x)+\beta(y)\}\\ &\leqslant \max\{\|x\|_{u_0}+\|y\|_{u_0},\|x\|_{u_0}+\|y\|_{u_0}\}\\ &= \|x\|_{u_0}+\|y\|_{u_0}. \quad \#\end{aligned}$$

据 u_0 - 范数的定义,若 $x\in E_{u_0}$,则必有:

$$-\|x\|_{u_0}\cdot u_0\leqslant x\leqslant \|x\|_{u_0}\cdot u_0. \qquad (3.2.8)$$

这个式子经常会被用到.

关于 E_{u_0} 空间的几个注记.

注 1:若 $\exists\, \alpha_0,\beta_0>0$,使得 $\alpha_0 u_0\leqslant v_0\leqslant \beta_0 u_0$,其中 $u_0,v_0\in P$,且 $u_0,v_0\neq\theta$,则 $E_{u_0}\equiv E_{v_0}$,且 u_0 - 范数等价于 v_0 - 范数,即 $\|\cdot\|_{u_0}\sim\|\cdot\|_{v_0}$.

证 $\forall x\in E_{u_0}$,则据 E_{u_0} 的定义知,必有下确界 $\alpha(x),\beta(x)>0$,使

$$-\alpha(x)u_0\leqslant x\leqslant \beta(x)u_0,$$

且

$$\alpha(x)\leqslant \|x\|_{u_0},\quad \beta(x)\leqslant \|x\|_{u_0}.$$

又由 $\alpha_0 u_0\leqslant v_0\leqslant \beta_0 u_0$,知 $u_0\leqslant \dfrac{1}{\alpha_0}v_0$,于是得

$$-\frac{\alpha(x)}{\alpha_0}v_0\leqslant x\leqslant \frac{\beta(x)}{\alpha_0}v_0. \qquad (3.2.9)$$

可见,$x\in E_{v_0}$,从而

$$E_{u_0}\subseteq E_{v_0}.$$

关于 v_0,此时还有:

$$-\alpha^*(x)v_0 \leqslant x \leqslant \beta^*(x)\cdot v_0 \qquad (3.2.10)$$

(其中下确界 $\alpha^*(x),\beta^*(x)>0$).

比较(3.2.9)式与(3.2.10)式得

$$\beta^*(x) \leqslant \frac{\beta(x)}{\alpha_0} \leqslant \frac{\|x\|_{u_0}}{\alpha_0},$$

$$\alpha^*(x) \leqslant \frac{\alpha(x)}{\alpha_0} \leqslant \frac{\|x\|_{u_0}}{\alpha_0},$$

从而有

$$\|x\|_{v_0} \leqslant \frac{\|x\|_{u_0}}{\alpha_0},$$

即

$$\alpha_0 \|x\|_{v_0} \leqslant \|x\|_{u_0}.$$

另一方面,$\forall x \in E_{v_0}$,则有

$$-\alpha^*(x)v_0 \leqslant x \leqslant \beta^*(x)v_0,$$

且

$$\beta^*(x) \leqslant \|x\|_{v_0}, \alpha^*(x) \leqslant \|x\|_{v_0}.$$

作与前面类似的推导可得

$$E_{v_0} \subseteq E_{u_0} \text{ 及 } \|x\|_{u_0} \leqslant \beta_0 \|x\|_{v_0},$$

所以有

$$E_{u_0} \equiv E_{v_0},$$

且

$$\alpha_0 \|x\|_{v_0} \leqslant \|x\|_{u_0} \leqslant \beta_0 \|x\|_{v_0},$$

即

$$\|\cdot\|_{u_0} \sim \|\cdot\|_{v_0}. \quad \#$$

注 2:E_{u_0} 空间中的范数 u_0 - 范数具有拟单调性:即若 $x,y \in$

E_{u_0},且 $|y| \leqslant x$,则

$$\|y\|_{u_0} \leqslant \|x\|_{u_0}.$$

证 因为 $x \in E_{u_0}$,由(3.2.8)式得

$$-\|x\|_{u_0} \cdot u_0 \leqslant x \leqslant \|x\|_{u_0} \cdot u_0,$$

再由 $|y| \leqslant x$,即 $-x \leqslant y \leqslant x$ 得

$$-\|x\|_{u_0} \cdot u_0 \leqslant y \leqslant \|x\|_{u_0} \cdot u_0,$$

从而

$$\|y\|_{u_0} \leqslant \|x\|_{u_0}. \quad \#$$

注 3:空间 E_{u_0} 未必完备.

事实上,取 $E = C_{[0,1]}$ 为[0,1]上连续函数的全体.取锥 $P = \{x \mid x \in C_{[0,1]}$,且 $x(t) \geqslant 0\}$ 为非负连续函数全体.又取 $u_0(t) \equiv 1$, $t \in [0,1]$,显然 $u_0 \in P$.

来验证这里的 E_{u_0} 即是[0,1]上有上、下界的连续函数的集合,且此时的 u_0 - 范数与 $C_{[0,1]}$ 中通常范数 $\|x\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$ 相同.

设 $x \in E_{u_0}$,则

①$x \in E = C_{[0,1]}$,即 $x(t)$ 是连续函数.

② 存在 $\alpha, \beta > 0$,使

$$-\alpha(x)u_0 \leqslant x \leqslant \beta(x)u_0. \tag{3.2.11}$$

此时的序关系 $x \leqslant y$ 等价于逐点有 $x(t) \leqslant y(t)$ $(t \in [0,1])$,故(3.2.11)式可写成:

$$-\alpha \leqslant x(t) \leqslant \beta \quad t \in [0,1],$$

即 $x(t)$ 是[0,1]上的有上、下界的函数.

反之,若 $x(t)$ 是[0,1]上的有上、下界的连续函数,则有实数 $M \geqslant m$,使得

$$m \leqslant x(t) \leqslant M \quad (t \in [0,1]).$$

取 $M^* = \max\{|M|, |m|\}$,则

$$-M^* \leqslant x(t) \leqslant M^*(t \in [0,1]).$$

等价地有:

$$M^* \cdot u_0 \leqslant x \leqslant M^* \cdot u_0,$$

因此 $$x \in E_{u_0}.$$

又若 $x \in E_{u_0}$,则存在 $\alpha(x), \beta(x) > 0$,使

$$-\alpha(x) u_0 \leqslant x \leqslant \beta(x) u_0,$$

等价地有:

$$-\alpha(x) \leqslant x(t) \leqslant \beta(x) \quad (t \in [0,1]).$$

据 u_0 - 范数的定义知:

$$\beta(x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t), \quad -\alpha(x) = \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} x(t),$$

故

$$\| x \|_{u_0} = \max\{\alpha(x), \beta(x)\} = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | x(t) | = \| x \|.$$

可见,此时 E_{u_0} 中的 u_0 - 范数即是 $C_{[0,1]}$ 中的通常范数.

把 E_{u_0} 作为 $C_{[0,1]}$ 中的子空间,显然它在 $C_{[0,1]}$ 中不是闭集,故 E_{u_0} 在 u_0 - 范数意义下不完备.

有时,为了讨论问题方便起见,也经常分别将 E_{u_0} 和 $\| x \|_{u_0}$ 取为

$$E_{u_0} = \{x \mid x \in E, \text{且存在 } \lambda > 0, \text{使 } -\lambda u_0 \leqslant x \leqslant \lambda u_0\},$$

$$\| x \|_{u_0} = \inf\{\lambda \mid \lambda > 0, -\lambda u_0 \leqslant x \leqslant \lambda u_0\}.$$

§3.3 正规锥、正则锥与完全正则锥

定义 3.3.1 设 E 为具锥 P 的 Banach 空间(即 $(E, \leqslant)$ 是半序 Banach 空间),$u, v \in E, u \leqslant v$,称子集 $\{x \in E \mid u \leqslant x \leqslant v\}$ 为 E 的一个**序区间**,记为 $\langle u, v \rangle$.

若 E 的子集 D 包含在某个序区间之中,则称点集 D 为**序有界**.

注 1:序有界与依范数有界是两个不同的概念.

例 3.3.1 取 $E = C^1_{[0,1]}$ 为连续可微函数空间,范数

$$\| x \| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} | x(t) | + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} | x'(t) |,$$

则按非负函数锥

$$P = \{x \in C^1_{[0,1]} \mid x(t) \geqslant 0\},$$

函数列 $x_n(t) = t^n$ 是序有界集.这是因为 $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$,从而 $x_n \in \langle \theta, e\rangle$,($e \stackrel{\Delta}{=} e(t) = 1$),但

$$\| x_n \| = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} | t^n | + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} | nt^{n-1} | = 1 + n \to \infty,$$

故 $\{x_n\}$ 依范数无界.

例 3.3.2 取 $E = C_0$ 为以 0 为极限的序列 $x = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots\}$ 的全体按范数 $\| x \| = \max_i | \xi_i |$ 和非负坐标锥构成的有序 Banach 空间,则 $x_n = \{1, 1, \cdots, \overset{n}{1}, 0, 0, \cdots\}$ 是依范有界集,$\| x_n \| \leqslant 1$,但不存在 $v \in C_0$,使 $x_n \leqslant v$,即 $\{x_n\}$ 不是序有界的.

注 2:序区间 $\langle u, v\rangle$ 是闭凸集.

由定理 3.1.1(3) 连续序容易推知它是闭集.

又设 $x_0, y_0 \in \langle u, v\rangle$,对 $\forall \lambda \in [0,1]$ 有

$$\lambda u \leqslant \lambda x_0 \leqslant \lambda v_0$$

及

$$(1-\lambda)u \leqslant (1-\lambda)y_0 \leqslant (1-\lambda)v,$$

所以

$$u \leqslant \lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 \leqslant v.$$

故连接点 x_0 与 y_0 的线段在序区间 $\langle u, v\rangle$ 中,因此 $\langle u, v\rangle$ 为凸集,从而序区间 $\langle u, v\rangle$ 为闭凸集.

注 3:序区间 $\langle u, v\rangle$ 可能依范无界.

由例 3.3.1 知,序区间 $\langle \theta, e\rangle$ 即是依范无界的.

由此可见,序区间 $\langle u, v\rangle$ 与数学分析中的区间 $[a, b]$ 之间的差别是较大的.上述例子也说明,在一般的半序 Banach 空间中,序与范数之间的联系太少了.为保证序区间 $\langle u, v\rangle$ 依范有界,我们将引进

半序空间的重要概念——正规锥.

定义 3.3.2 具锥 P 的 Banach 空间 E 中的点列 $\{x_n\}$ 称做是**序单调**的,是指:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots.$$

又若 $\exists\, y \in E$,使 $x_n \leqslant y(n = 1,2,\cdots)$,则称点列 $\{x_n\}$ 是**序有界**的.

定义 3.3.3 设 P 为 Banach 空间 E 中的闭锥,我们称 P 为:

正规锥,是指 E 中任一序区间均依范数有界;

正则锥,是指 E 中任一序单调且序有界的点列均依范数收敛;

完全正则锥,是指 E 中任一序单调且依范数有界的点列均依范数收敛.

定理 3.3.1 设 P 是 Banach 空间 E 中的闭锥,则下述条件互相等价:

1°P 是正规锥;

2°$\exists\, \delta > 0, \forall\, x, y \in P$,当 $\|x\| = \|y\| = 1$ 时,恒有

$$\|x + y\| \geqslant \delta;$$

3° 对 $\theta \neq u_0 \in P$ 及 $\forall\, x \in E_{u_0}$,$\exists$ 常数 $M > 0$,使

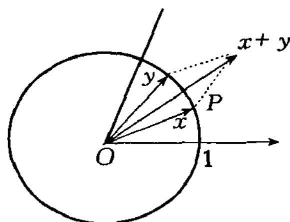
$$\|x\| \leqslant M \|x\|_{u_0} \cdot \|u_0\|;$$

4°$\exists$ 常数 $N > 0$,使当 $\theta \leqslant x \leqslant y$ 时,恒有

$$\|x\| \leqslant N \|y\|;$$

5° 设 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$,且 $x_n \to x^*$,$z_n \to x^*$,则 $y_n \to x^*$.

注:2° 即是 krein 正规锥的定义,其直觉意义可理解为锥 P 中两向量的夹角不能任意地接近 π,从而锥 P 的张角也小于 π.如图所示.



3° 给出了空间范数 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_E$ 与 u_0 - 范数 $\|\cdot\|_{u_0}$ 之间的关系.

4° 的意思是:范数是半单调的泛函,特别,当 $M = 1$ 时,范数是

单调泛函.

5° 即是通常求极限的两边夹法则.

证 1°⇒2°:若结论不成立,任取

$$\delta = \frac{1}{n^3} > 0, \exists x_n, y_n \in P,$$

且

$$\| x_n \| = \| y_n \| = 1,$$

但

$$\| x_n + y_n \| < \frac{1}{n^3} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

故

$$n \| x_n + y_n \| < \frac{1}{n^2},$$

由于 p - 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,据正项级数的比较判别法知

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \| x_n + y_n \|$$

收敛,由空间 E 的完备性知,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x_n + y_n)$$

绝对收敛于 E 中某元 u_0. 既然 $x_n, y_n \in P$,
据 P 的正齐性和闭凸性得 $u_0 \in P$,写

$$u_0 = \sum_{k=1}^{n-1} k(x_k + y_k) + n(x_n + y_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(x_k + y_k).$$

由于

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(x_k + y_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(x_k + y_k) \in p,$$

故

$$u_0 - n(x_n + y_n) \in P.$$

即

$$u_0 \geqslant n(x_n + y_n) \geqslant nx_n \geqslant \theta,$$

所以

$$nx_n \in \langle \theta, u_0 \rangle,$$

即点列$\{nx_n\}$是序有界集,但

$$\| nx_n \| = n \to \infty,$$

故$\{nx_n\}$依范无界,与1°中正规锥定义矛盾.

2°⇒3°:用反证法.

设常数$M > 0$不存在,且有

$$\theta \neq u_n \in P, x_n \in E_{u_n} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

使得

$$\| x_n \| > n \| x_n \|_{u_n} \cdot \| u_n \|,$$

所以

$$\frac{1}{\| x_n \|} < \frac{1}{n \| x_n \|_{u_n} \cdot \| u_n \|}.$$

由$x_n \in E_{u_n}$,据(3.2.2)式有:

$$- \| x_n \|_{u_n} \cdot u_n \leqslant x_n \leqslant \| x_n \|_{u_n} \cdot u_n.$$

结合上两式有:

$$-\frac{u_n}{n \| u_n \|} < \frac{x_n}{\| x_n \|} < \frac{u_n}{n \| u_n \|} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

所以

$$\frac{x_n}{\| x_n \|} + \frac{u_n}{n \| u_n \|} \geqslant \theta,$$

$$-\frac{x_n}{\| x_n \|} + \frac{u_n}{n \| u_n \|} \geqslant \theta,$$

于是

$$g_n \stackrel{\Delta}{=} \frac{x_n}{\| x_n \|} + \frac{u_n}{n \| u_n \|} \in P,$$

$$h_n \stackrel{\Delta}{=} -\frac{x_n}{\| x_n \|} + \frac{u_n}{n \| u_n \|} \in P,$$

从而

$$\frac{g_n}{\| g_n \|} \in P, \frac{h_n}{\| h_n \|} \in P,$$

且

$$\left\| \frac{g_n}{\| g_n \|} \right\| = 1, \quad \left\| \frac{h_n}{\| h_n \|} \right\| = 1,$$

由 2° 有：

$$\left\| \frac{g_n}{\| g_n \|} + \frac{h_n}{\| h_n \|} \right\| \geqslant \delta \quad (n = 1,2,\cdots), \qquad (3.3.1)$$

又

$$\| g_n \| = \left\| \frac{x_n}{\| x_n \|} + \frac{u_n}{n \| u_n \|} \right\|$$

$$\geqslant \left\| \frac{x_n}{\| x_n \|} \right\| - \left\| \frac{u_n}{n \| u_n \|} \right\| = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\| h_n \| = \left\| -\frac{x_n}{\| x_n \|} + \frac{u_n}{n \| u_n \|} \right\|$$

$$\leqslant \left\| \frac{-x_n}{\| x_n \|} \right\| + \left\| \frac{u_n}{n \| u_n \|} \right\| = 1 + \frac{1}{n},$$

所以

$$\big\| \| g_n \| - \| h_n \| \big\| \leqslant \frac{2}{n}.$$

由于

$$g_n + h_n = \frac{2u_n}{n \| u_n \|},$$

所以

$$\frac{g_n}{\| g_n \|} + \frac{h_n}{\| h_n \|}$$

$$= \frac{1}{\| g_n \|}\left(\frac{2u_n}{n \| u_n \|} - h_n\right) + \frac{h_n}{\| h_n \|}$$

$$= \frac{2u_n}{n \| g_n \| \cdot \| u_n \|} + \frac{\| g_n \| - \| h_n \|}{\| g_n \| \cdot \| h_n \|} \cdot h_n$$

故

$$\left\| \frac{g_n}{\| g_n \|} + \frac{h_n}{\| h_n \|} \right\| \leqslant \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$$

$$= \frac{4}{n-1},$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty} \left\| \frac{g_n}{\| g_n \|} + \frac{h_n}{\| h_n \|} \right\| = 0$与(3.3.1)式矛盾.

3°⇒4°:设 $x, y \in P$,且 $\theta \leqslant x \leqslant y$,从而

$$-y \leqslant x \leqslant y.$$

若 $y \neq \theta$,则据 u_0 - 范数定义知:$\| x \|_y \leqslant 1$,故由 3° 得:存在常数 $M > 0$,使

$$\| x \| \leqslant M \| x \|_y \cdot \| y \| \leqslant M \| y \|.$$

而当 $y = \theta$ 时,上式显然成立,从而取 $M = N$,即得 4°.

4°⇒5°:设 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$,且 $x_n \to x^*$,$z_n \to x^*$,
则有

$$\theta \leqslant y_n - x_n \leqslant z_n - x_n,$$

从而由 4° 有

$$\| y_n - x_n \| \leqslant M \| z_n - x_n \|,$$

故

$$\begin{aligned} \| y_n - x^* \| &\leqslant \| y_n - x_n \| + \| x_n - x^* \| \\ &\leqslant M \| z_n - x_n \| + \| x_n - x^* \| \\ &\leqslant M \| z_n - x^* \| + M \| x^* - x_n \| \\ &\quad + \| x_n - x^* \| \to 0 \quad (n \to \infty). \end{aligned}$$

5°⇒1°:设有某个序区间$\langle u, v \rangle$依范数无界,记 $w = v - u$,则序区间$\langle \theta, w \rangle$也依范数无界,从而存在 $x_n \in \langle \theta, w \rangle$,且 $x_n \in P$,使得 $\| x_n \| \to \infty$. 由于 $\theta \leqslant x_n \leqslant w$,
故

$$\theta \leqslant \frac{x_n}{\| x_n \|} \leqslant \frac{w}{\| x_n \|},$$

因为 w 为固定值，因此$\frac{w}{\| x_n \|} \to \theta(n \to \infty)$，据 4° 两边夹法则得：

$$\frac{x_n}{\| x_n \|} \to \theta(n \to \infty),$$

但$\frac{x_n}{\| x_n \|}$是单位向量，显然不会有：

$$\frac{x_n}{\| x_n \|} \to \theta(n \to \infty),$$

矛盾. #

定理 3.3.2 (1) 若 P 是正则锥，则 P 必为正规锥；

(2) 若 P 是完全正则锥，则 P 必为正则锥.

证明：(1) 用反证法. 设 P 不是正规的，于是据 krein 正规锥定义的否定叙述：$\exists \{x_n\} \subset P, \{y_n\} \subset P$，使

$$\| x_n \| = \| y_n \| = 1, \| x_n + y_n \| < \frac{1}{n^2}(n = 1,2,\cdots),$$

由

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| x_n + y_n \| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$绝对收敛于 $u \in P$，即

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n),$$

令

$$z_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

显然

$$z_{n+1} = z_n + x_{n+1} \geqslant z_n \quad (\text{因为 } \theta \leqslant x_{n+1} \in P),$$

且

$$\| z_{n+1} - z_n \| = \| x_{n+1} \| = 1 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

又因为

$$z_n \leqslant (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n) \leqslant u,$$

可见点列$\{z_n\}$是序单调且序有界的，但它却不依范数收敛，因为每相邻两项的距离为1：$\|z_{n+1}-z_n\|=1(n=1,2,\cdots)$不会有$z^*\in E$，使$\|z_n-z^*\|\to 0(n\to\infty)$，与$K$为正则锥矛盾.

(2)① 先证完全正则锥是正规锥.

若P不正规，则对$\delta=\frac{1}{2^n}$，有$x_n,y_n\in P$，

$$\|x_n\|=\|y_n\|=1,$$

使$\|x_n+y_n\|<\frac{1}{2^n}$，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)$绝对收敛于$u\in P$，作：

$$h_n=\begin{cases}(x_1+y_1)+\cdots+(x_k+y_k), & \text{当 } n=2k,\\ (x_1+y_1)+\cdots+(x_k+y_k)+x_{k+1}, & \text{当 } n=2k+1.\end{cases}$$

则显然$h_n\leqslant h_{n+1}$(即$\{h_n\}$序单调).

又当$n=2k$时，

$$\begin{aligned}\|h_n\|&\leqslant\|x_1+y_1\|+\|x_2+y_2\|+\cdots+\|x_k+y_k\|\\ &<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\\ &<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1.\end{aligned}$$

当$n=2k+1$时，

$$\begin{aligned}\|h_n\|&\leqslant\|x_1+y_1\|+\|x_2+y_2\|+\cdots+\|x_k+y_k\|\\ &\quad+\|x_{k+1}\|\\ &<1+1=2.\end{aligned}$$

故$\{h_n\}$依范数有界，故据P为完全正则锥知，点列$\{h_n\}$依范数收敛，但$\|h_{n+1}-h_n\|=1$，矛盾.

② 下证对正规锥，序有界的序单调点列$\{x_n\}$必为依范数有界的序单调点列.

设$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant\cdots\leqslant y$，则$\{x_n\}\subset\langle x_1,y\rangle$，
由①知，锥P正规，据正规锥定义知，序区间$\langle x_1,y\rangle$依范数有界，从而点列$\{x_n\}$的确是依范数有界的.

再由 P 为完全正则锥知,序单调的依范数有界点列 $\{x_n\}$ 依范数收敛,从而 P 为正则锥. #

确实存在不正规的锥,正规而不正则的锥,正则而不完全正则的锥.

例 3.3.3 (1) 据正规锥的定义即知,$C^1_{[0,1]}$ 中非负函数锥 $P = \{x \in C^1_{[0,1]} \mid x(t) \geqslant 0\}$ 不是正规的.

(2) 空间 $C_{[a,b]}$ 中非负函数锥 $P = \{x \in C_{[a,b]} \mid x(t) \geqslant 0\}$ 是正规的.

因为若 $\theta \leqslant x \leqslant y$,则有

$$0 \leqslant x(t) \leqslant y(t), t \in [a,b],$$

从而

$$\max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |y(t)|,$$

即

$$\|x\| \leqslant \|y\|, \text{此处 } N = 1.$$

据定理 3.3.1.(4°) 知,P 是正规锥,但此锥不是正则的.

因为对点列 $x_{n(t)} = 1 - t^n (n = 1,2,\cdots), t \in [0,1]$,有

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant 1,$$

即点列 $\{x_n\}$ 是序单调,序有界的,但在 $C_{[0,1]}$ 中依范数却无极限.这是因为据数学分析知,$x_n(t)$ 在 $[0,1]$ 上非一致收敛,而 $C_{[0,1]}$ 中点列 $\{x_n\}$ 依范数收敛等价于函数列 $x_n(t)$ 一致收敛.

类似可证,空间 $L^p_{[a,b]}$ 中非负函数锥既是正规锥,也是正则锥(作为练习,可自行证明).

(3) 空间 C_0 中非负坐标锥 P 是正则锥而非完全正则锥.

设 $x_n = \{\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)}, \cdots\} \in C_0, v = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, \cdots\} \in C_0$,又设 $\{x_n\}$ 是序单调且序有界的,即

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant v.$$

据非负坐标锥 P 的构造知:$\{x_n\}$ 序有界 $x_n \leqslant v$ 蕴含对每个 $k = 1, 2, \cdots$,有 $\xi_k^{(n)} \leqslant \eta_k$;

而$\{x_n\}$序单调则蕴含对每个$k=1,2,\cdots,\{\xi_k^{(n)}\}$单调. 因此对每个$k$,实数列$\{\xi_k^{(n)}\}$单调有界,从而有极限,记

$$\lim_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k\leqslant\eta_k,$$

由$v\in C_0$,得

$$x=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots\}\in C_0,$$

且按C_0中范数$\|x\|=\max_k|\xi_k|$,点列$\{x_n\}$收敛于x,因此C_0中非负坐标锥P正则.

取$x_n=\{1,\cdots,\overset{n}{1},0,\cdots,0\}$,则

$$x_{n+1}-x_n=\{0,\cdots,0,\overset{n+1}{1},0,\cdots\}\in P,$$

故$x_{n+1}\geqslant x_n$,即$\{x_n\}$序单调,且

$$\|x_n\|=\max_k|\xi_k|=1,$$

因此$\{x_n\}$依范数有界,但按坐标的极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\{1,1,\cdots,1,\cdots\}\notin C_0,$$

由于C_0中点列$\{x_n\}$依范数收敛等价于$\{x_n\}$按坐标收敛,故C_0中的点列$\{x_n\}$在C_0中不依范数收敛. 据定义即知C_0中的非负坐标锥P不是完全正则的.

例 3.3.4 有限维空间R^n中的任何一个锥P均是完全正则锥.

证 设点列$\{x_n\}\subset R^n$,按照R^n中任一锥P依序单调且依范有界,则据R^n中 Bolzano – Weierstrass 定理,必有子列$\{x_{n_i}\}\subset\{x_n\}$收敛,设$\lim_{i\to\infty}x_{n_i}=x^*$.

下证点列$\{x_n\}$也收敛于x^*. 若不然,必另有子列$\{x_{n_k}{}'\}\subset\{x_n\}$收敛于$y^*$,且$y^*\neq x^*$,即$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}{}'=y^*(y^*\neq x^*)$. 但因点列$\{x_n\}$是序单调的,故对每个$x_{n_i}$必定有相应的$x_{n_k}{}'$与$x_{n_{k+p}}{}'$使:

$$x_{n_k}{}'\leqslant x_{n_i}\leqslant x_{n_{k+p}}{}'.$$

由于$\lim_{i\to\infty}x_{n_i}=x^*$及$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}{}'=y^*$,在上式中令$k\to\infty$得

$$y^*\leqslant x^*\leqslant y^*,$$

故 $x^* = y^*$,与 $x^* \neq y^*$ 矛盾.

可见,依范有界的序单调点列依范数收敛,又锥 P 是任意的,故 R^n 中任何锥 P 是完全正则的. #

前面已说明,在一般情况下,空间 E_{u_0} 按 u_0 - 范数未必完备,但当 Banach 空间 E 中的锥 P 为正规锥时,E_{u_0} 依 u_0 - 范数必定完备.

定理 3.3.3 设 P 为 Banach 空间 E 中的正规锥,则 E 的子空间 E_{u_0} 按 u_0 - 范数完备,从而 E_{u_0} 为 Banach 空间.

证 设点列 $\{x_n\} \subset E_{u_0}$ 是依 u_0 - 范数的基本列. 因为 P 为正规锥,据定理 3.3.1 (3°) 有:

$$\| x_m - x_n \| \leqslant M \| x_m - x_n \|_{u_0} \cdot \| u_0 \|,$$

即 $\| x_m - x_n \|_{u_0}$ 较 $\| x_m - x_n \|$ (即 $\| x_m - x_n \|_E$) 强,故在空间范数 $\| \cdot \| = \| \cdot \|_E$ 的意义下,$\{x_n\}$ 仍是基本列. 因为 E 为 Banach 空间,据 E 的完备性知,$\exists x^* \in E$,使 $\| x_n - x^* \| \to 0 (n \to \infty)$.

下证 $x^* \in E_{u_0}$,且 $\{x_n\}$ 依 u_0 - 范数收敛到 x^*.

因为 $\{x_n\}$ 是 E_{u_0} 中的基本列,故 $\forall \varepsilon_n > 0$,且让 $\varepsilon_n \to 0$, $\exists n \in \mathbf{N}$, $\forall m = 1,2,\cdots$,有:

$$\| x_{n+m} - x_n \|_{u_0} < \varepsilon_n . \tag{3.3.2}$$

又据(3.2.2)式有:

$$- \| x_{n+m} - x_n \|_{u_0} \cdot u_0 \leqslant x_{n+m} - x_n \leqslant \| x_{n+m} - x_n \|_{u_0} \cdot u_0 .$$

结合(3.3.2)式,有:

$$- \varepsilon_n \cdot u_0 \leqslant x_{n+m} - x_n \leqslant \varepsilon_n \cdot u_0 .$$

由于 $x_n \xrightarrow{\| \cdot \|_E} x^* (n \to \infty)$,在上式中令 $m \to \infty$,得

$$- \varepsilon_n \cdot u_0 \leqslant x^* - x_n \leqslant \varepsilon_n \cdot u_0 ,$$

由此推知,$x^* - x_n \in E_{u_0}$,再 $x_n \in E_{u_0}$,由于 E_{u_0} 为线性空间,得

$$x^* = (x^* - x_n) + x_n \in E_{u_0},$$

还有

$$\| x^* - x_n \|_{u_0} \leqslant \varepsilon_n \to 0 (n \to \infty).$$

因此 E_{u_0} 依 u_0 - 范数完备. #

设 $D \subset E, z \in E$. 若对 $\forall x \in D$ 均有 $x \leqslant z$;同时,从 $x \leqslant z_1$(对 $\forall x \in D$)可推出 $z \leqslant z_1$;则称 z 是 D 的上确界,记为 $\sup D$. 同样可定义下确界 $\inf D$.

定义 3.3.4 若具锥 P 的 Banach 空间 E 中任二元素 x, y 都存在上确界 $\sup\{x, y\}$,则称**锥 P 是极小的**;若 E 中任何有上界的集 D 都具有上确界 $\sup D$,则称**锥 P 是强极小的**.

定义 3.3.5 设 E 为由锥 P 产生的半序 Banach 空间,若对 $\forall x, y \in E$ 均存在 $\sup\{x, y\} \triangleq x \vee y$ 及 $\inf\{x, y\} \triangleq x \wedge y$,则称 E 是**格**;

进一步,若当 $|x| \leqslant |y|$ 时,有 $\|x\| \leqslant \|y\|$,则称 E 为 Banach **格**.

显然,E 为格时,锥 P 是极小的;E 为 Banach 格时,P 为正规锥.

定义 3.3.6 对具锥 P 的 Banach 空间 E,$\forall x \in E$,均可表为 $x = y - z$,且 $y \in P, z \in P$,则称 **P 是再生锥**.

定理 3.3.4 若 P 是体锥,则 P 是再生的.

证 因为 P 是体锥,故设 u_0 是 P 的内点,于是 $\exists \rho > 0$,使闭球

$$\bar{S}(u_0, \rho) = \{x \mid \|x - u_0\| \leqslant \rho\} \subset P \quad \forall x \in E,$$

则

$$u_0 \pm \rho \cdot \frac{x}{\|x\|} \in \bar{S}(u_0, \rho) \subset P,$$

从而

$$u_0 \pm \rho \frac{x}{\|x\|} \geqslant \theta,$$

根据锥的正齐性有:

$$\frac{\|x\|}{\rho}\left(u_0 \pm \rho \frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\|x\|}{\rho} u_0 \pm x \geqslant \theta,$$

令

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|}{\rho}u_0 + x\right), z = \frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|}{\rho}u_0 - x\right),$$

则

$$y \geqslant \theta, z \geqslant \theta,$$

即

$$y \in P, z \in P, \quad 且 \quad x = y - z,$$

因此 P 是再生锥. #

注:P 为体锥的条件不能少,否则结果不真.事实上,取 $E = R^2$,$P = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y = 0\}$,$P$ 非体锥(因为 P 无内点).显然平面上的向量一般不能表成锥 P 中的两个向量之差.

例 3.3.5 设 $E = C(G)$ 为 R^n 中有界闭集 G 上的连续函数空间($\|\varphi\| = \max\limits_{x \in G} |\varphi(x)|$),令

$$P = \{\varphi \mid \varphi \in C(G), \varphi(x) \geqslant 0\},$$

则 P 是 $C(G)$ 的一个体锥,且 P 是再生锥.因为 $\forall \varphi \in C(G)$,有 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$,其中

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 当\ \varphi(x) \geqslant 0, \\ 0, & 当\ \varphi(x) < 0, \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0 & 当\ \varphi(x) \geqslant 0, \\ -\varphi(x), & 当\ \varphi(x) < 0, \end{cases}$$

显然 $\varphi_1 \in P, \varphi_2 \in P$.

P 是极小的,因为 $\forall \varphi, \psi \in C(G)$,有

$\sup\{\varphi, \psi\} = h, h(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\} \in C(G).$

但 P 不是强极小的.例如,取 $G = [0,2]$,取 $D = \{\varphi \mid \varphi \in C_{[0,2]}$,且当 $x \in (0,1)$ 时,$\varphi(x) < 1$,当 $x \in (1,2)$ 时,$\varphi(x) < 2\}$,于是 D 有上界,但 D 在 $C_{[0,2]}$ 上显然无上确界.

定理 3.3.5 设 E 为具锥 P 的 Banach 空间,则 P 为体锥($u_0 \in P^\circ$)的充要条件是:$E_{u_0} = E$,且

$$\|x\|_{u_0} \leqslant \frac{1}{\rho}\|x\| \quad (x \in E),$$

其中 $\rho > 0$ 满足闭球 $\bar{S}(u_0,\rho) = \{x \mid \|x - u_0\| \leqslant \rho\} \subset P$.

证 设 P 为体锥，$u_0 \in P^\circ$，且

$$\bar{S}(u_0,\rho) = \{x \mid \|x - u_0\| \leqslant \rho\} \subset P,$$

则 $\forall x \in E, x \neq \theta$，有

$$u_0 \pm \rho \frac{x}{\|x\|} \in \bar{S}(u_0,\rho) \subset P,$$

于是

$$u_0 \pm \rho \frac{x}{\|x\|} \geqslant \theta,$$

从而

$$-u_0 \leqslant \rho \frac{x}{\|x\|} \leqslant u_0,$$

即

$$-\frac{\|x\|}{\rho} u_0 \leqslant x \leqslant \frac{\|x\|}{\rho} u_0.$$

说明 $x \in E_{u_0}$，所以 $E \subset E_{u_0}$，又因为 $E \supset E_{u_0}$，所以 $E_{u_0} = E$，且显然有

$$\|x\|_{u_0} \leqslant \frac{1}{\rho} \|x\| \quad (x \in E).$$

反之，设 $E_{u_0} = E$，且 $\|x\|_{u_0} \leqslant \frac{1}{\rho} \|x\| (x \in E)$，$\rho > 0$ 满足闭球

$$\bar{S}(u_0,\rho) = \{x \mid \|x - u_0\| \leqslant \rho\} \subset P,$$

则有

$$\|x - u_0\|_{u_0} \leqslant \frac{1}{\rho} \|x - u_0\| (x \in E),$$

于是对 $\forall x \in \bar{S}(u_0,\rho)$，有

$$\|x - u_0\|_{u_0} \leqslant \frac{1}{\rho} \|x - u_0\| \leqslant \frac{1}{\rho} \cdot \rho = 1.$$

从而

$$-u_0 \leqslant x - u_0 \leqslant u_0,$$

故 $x \geqslant \theta$， 即 $x \in P$，
因此
$$\bar{S}(u_0,\rho) \subset P,$$
于是 P 为体锥. #

结合定理 3.3.1(3°) 与定理 3.3.5 知，当 P 为正规的体锥时，在 E_{u_0} 中有：
$$\rho \| x \|_{u_0} \leqslant \| x \| \leqslant M \| u_0 \| \cdot \| x \|_{u_0},$$
即范数 $\| x \|$ 与 $\| x \|_{u_0}$ 等价.

若记 $P_{u_0} = P \cap E_{u_0}$，则易知 P_{u_0} 是 E_{u_0} 中的一个锥，且是体锥（如 u_0 就是 P_{u_0} 的内点）. 关于 P_{u_0} 有如下定理：

定理 3.3.6 (1) 若 $x_0 \in E - P$，则 x_0（关于 u_0 - 范数）必非 P_{u_0} 的聚点；

(2) u_0 - 范数关于 P_{u_0} 是单增的（即 $x, y \in E_{u_0}$，从 $\theta \leqslant x \leqslant y$ 可推出 $\| x \|_{u_0} \leqslant \| y \|_{u_0}$）.

证 (1) 用反证法. 设 x_0 关于 u_0 - 范数是 P_{u_0} 的聚点，即 $\exists \{x_n\} \subset P_{u_0}$，使
$$\| x_n - x_0 \|_{u_0} \to 0 (n \to \infty),$$
于是，$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，$\| x_n - x_0 \|_{u_0} < \varepsilon$. 又据 (3.2.2) 式知：
$$- \| x_n - x_0 \|_{u_0} \cdot u_0 \leqslant x_n - x_0 \leqslant \| x_n - x_0 \|_{u_0} \cdot u_0,$$
从而
$$- \varepsilon u_0 \leqslant x_n - x_0 \leqslant \varepsilon u_0 \quad (n > N).$$
因为 $x_n \in P_{u_0}$，所以
$$x_n \in P, \theta \leqslant x_n \leqslant x_0 + \varepsilon u_0,$$
故
$$x_0 + \varepsilon u_0 \in P.$$

令 $\varepsilon \to 0$,由锥 P 为闭集知:$x_0 \in P$,与 $x_0 \in E - P$ 矛盾.

(2) 设 $x, y \in E_{u_0}$,且 $\theta \leqslant x \leqslant y$,则由

$$- \| y \|_{u_0} \cdot u_0 \leqslant y \leqslant \| y \|_{u_0} \cdot u_0$$

得

$$\theta \leqslant x \leqslant y \leqslant \| y \|_{u_0} \cdot u_0.$$

据 u_0 - 范数的定义即知:$\| x \|_{u_0} \leqslant \| y \|_{u_0}$. #

结合定理3.3.1(4°)与定理3.3.6(2)即知,P_{u_0} 是 E_{u_0} 中的一个正规锥.

定理 3.3.7 正则的体锥 P 是完全正则锥.

证 只需证明序单调,依范数有界的点列 $\{x_n\}$ 必是序有界的即可.

因为 P 为体锥,所以取 $\theta \neq u_0 \in P^\circ$ 及 $\rho > 0$,有闭球 $\bar{S}(u_0, \rho) \subset P$. 任取点列 $\theta \neq x_n \in E$,满足 $\| x_n \|$ 有界,且

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots,$$

则 $u_0 \pm \rho \dfrac{x_n}{\| x_n \|} \in \bar{S}(u_0, \rho) \subset P$,可推知:

$$- \frac{\| x_n \|}{\rho} u_0 \leqslant x_n \leqslant \frac{\| x_n \|}{\rho} u_0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

因为 $\{\| x_n \|\}$ 是一非空有界数集,所以有上确界,设为 β,即

$$\beta = \sup_n \| x_n \|,$$

从而

$$- \frac{\beta}{\rho} u_0 \leqslant x_n \leqslant \frac{\beta}{\rho} u_0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

因此点列 $\{x_n\}$ 是序有界的. 因为 P 是正则的,故序单调,序有界的点列 $\{x_n\}$ 是依范数收敛的. 但点列 $\{x_n\}$ 同时又是序单调,依范数有界的,故 P 是完全正则锥.

§3.4 共轭锥与凸集隔离性原理

定义 3.4.1 设 E 为具锥 P 的 Banach 空间,E 上的有界线性泛

函 f 称为正泛函是指：

$$\forall x \in P, 有\ f(x) \geqslant 0.$$

E 上正泛函的全体记为P^*.

例 3.4.1 泛函 $f(x) = \|x\|_{u_0}$ 即是空间 E_{u_0} 上的一个正泛函.

注 1:正泛函必是单增的.

其实,若

$$x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 \in P,$$

因为 f 为正泛函,所以

$$f(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

又因为 f 为线性泛函,所以

$$f(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0 \Rightarrow f(x_2) \geqslant f(x_1).$$

注 2:易知 P^* 是 E 的共轭空间E^* 中的闭凸子集,且 $\forall \lambda \geqslant 0$ 及 $\forall f \in P^*$ 有 $\lambda f \in P^*$.但 P^* 未必是 E^* 中的锥.

例 3.4.2 取 $E = R^2, P = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y = 0\}$,定义 $f[(x,y)] = y$,则显然 f 是有界线性泛函,当 $u = (x,y) \in P$ 时 $\Rightarrow f(u) = 0$,从而 $f \in P^*$,且同样有 $-f \in P^*$,但显然 $f \neq \theta$,即 P^* 不是锥.

但当 P 为体锥时,P^* 必是 E^* 中的一个锥.

定理 3.4.1 若 P 是 Banach 空间 E 中的体锥,则 P^* 必是 E^* 中的锥.此时称 P^* 为共轭锥.

证 由注 2,只需证明 P^* 满足锥的条件 2°,即证若 $f \in P^*$, $-f \in P^*$,则 $f = \theta$.

$\forall x \in E$,因为 P 是体锥,据定理 3.3.4 知,P 是再生锥,所以 $\exists y, z \in P$,使得 $x = y - z$.又因为 $f, -f \in P^*$,故有

$$f(x) = f(y - z) = f(y) - f(z) = f(y) + (-f)(z) \geqslant 0,$$

$$-f(x) = f(-x) = f(z) + (-f)(y) \geqslant 0,$$

所以 $f(x) = 0$,由 x 的任意性可知 $f = \theta$. #

利用正泛函，我们可以分别得到判别正则锥与完全正则锥的判别法则.

定理 3.4.2 （**完全正则锥的判别法则**）设 E 为具锥 P 的 Banach 空间，若 $\exists f \in P^*$ 满足：

(1) $\forall \{x_n\} \subset P$，由 $\|x_n\| \geqslant \varepsilon_0 > 0(n = 1,2,\cdots)$ 推出 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = +\infty$.

(2) f 在每个闭球 $\bar{S}(0,M)$ 上有界 $(M > 0)$. 则 P 是完全正则锥.

证 用反证法. 设 P 不是完全正则锥，则必存在按序单增，且依范数有界的点列 $\{x_n\}$：

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots, \text{且 } \|x_n\| \leqslant M \ (n = 1,2,\cdots),$$

但 $\{x_n\}$ 不依范收敛. 于是

$$\|x_{n+1} - x_n\| \geqslant \varepsilon_0 > 0(n = 1,2,\cdots),$$

不妨设 $\|x_1\| > \varepsilon_0 > 0$（只需 $\varepsilon_0 > 0$ 取得充分小）. 又由于

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}),$$

据条件(1)，对正泛函 f 有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f[x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})] = +\infty,$$

但由条件(2)，正泛函 f 在每个闭球 $\bar{S}(0,M)$ 上有界，故 $f(x_n)$ 也应在闭球 $\|x_n - 0\| = \|x_n\| \leqslant M$ 上有界，得出矛盾. #

定理 3.4.3 （**正则锥的判别法则**）设 P 是 Banach 空间 E 中的闭锥，若 $\exists f \in P^*$ 满足：$\forall \{x_n\} \subset P$，由 $\|x_n\| \geqslant \varepsilon_0 > 0(n = 1, 2,\cdots)$ 推出

$$\lim_{n\to\infty} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = +\infty,$$

则 P 为正则锥.

证 用反证法. 设 P 不为正则锥，则可找到按序单增且按序有上界的点列 $\{x_n\} \subset P$.

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots \leqslant u \quad (u \in P).$$

但 $\{x_n\}$ 不依范数收敛. 于是

$$\| x_{n+1} - x_n \| \geqslant \varepsilon_0 > 0 (n = 1,2,\cdots),$$

不妨设 $\| x_1 \| \geqslant \varepsilon_0 > 0$,据已知条件,对正泛函 f 有:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f[x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1})] = +\infty.$$

由于正泛函 f 是单增的,即由 $x_n \leqslant u$ 可推出 $f(x_n) \leqslant f(u)$,但因 $f(x_n) \to +\infty (n \to \infty)$,故当 $n \to \infty$ 时,$f(x_n)$ 不会总小于定值 $f(u)$,矛盾. #

例 3.4.3 设 $E = L^p(\Omega) (p \geqslant 1, 0 < \mathrm{mes}\Omega < +\infty)$,令

$$P = \{x \mid x \in L^p(\Omega), x(t) \geqslant 0\},$$

显然 P 是 $L^p(\Omega)$ 中的一个锥,但不是体锥(P 无内点).

记 $$f(x) = \int_\Omega | x(t) |^p \mathrm{d}t = \| x \|^p,$$

则显然 f 为锥 P 上的正泛函.

因为不等式 $(\alpha + \beta)^p \geqslant \alpha^p + \beta^p (p \geqslant 1)$ 对 $\alpha, \beta \geqslant 0$ 均成立,故对任何非负函数 $x(t), y(t) \in P$,有

$$| x(t) + y(t) |^p \geqslant | x(t) |^p + | y(t) |^p \quad a,e \text{ 于 } \Omega,$$

从而有

$$f(x + y) \geqslant f(x) + f(y),$$

也即

$$\| x + y \|^p \geqslant \| x \|^p + \| y \|^p,$$

于是

$$\forall \{x_n\} \subset P, \text{且 } \| x_n \| \geqslant \varepsilon_0 > 0 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由
$$\begin{aligned} &\| x_1 + x_2 + \cdots + x_n \|^p \\ \geqslant &\| x_1 \|^p + \| x_2 \|^p + \cdots + \| x_n \|^p \\ \geqslant &\varepsilon_0^p + \varepsilon_0^p + \cdots + \varepsilon_0^p \\ = &n \cdot \varepsilon_0^p, \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) &\geqslant f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \\ &= n \cdot \varepsilon_0^p, \end{aligned}$$

所以当 $n \to \infty$ 时,

$$f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geqslant n \cdot \varepsilon_0{}^p \to +\infty.$$

又因为 $f(x) = \|x\|^p$ 在每个闭球$\bar{S}(0,M)$上显然有

$$f(x) = \|x\|^p \leqslant M^p,$$

即有界.故据定理 3.4.2 知,P 为完全正则锥.

我们已经建立了共轭锥 P^* 的概念,但是还不知道 P^* 是否实有其事,也就是说,当 P 为非平凡锥(即 $P \neq \{\theta\}$)时,P^* 中是否确有非零元存在,下面就来解决这个问题.为此我们先围绕正泛函延拓定理,引出一些基本定理,再给出 Mazur 关于凸集隔离性定理.

定理 3.4.4 **(正泛函延拓定理)** 设 $P \neq E$ 是 Banach 空间 E 中的体锥,M 是E 的一个线性子空间,它至少包含 P 中的一个内点u_0,则 M 上任一正泛函$f(x)$必可延拓至整个空间 E.

证 设 $M \subset E, y_0 \in E - M$,仿照 Hahn - Banach 有界线性泛函延拓定理,只需说明可将子空间 M 上定义的正泛函f 延拓至包含 y_0 和 M 的最小线性子空间

$$M_0 = \{x + \lambda y_0 \mid \lambda \in R, x \in M\} = \mathrm{span}(y_0, M)$$

(集 M 与点 y_0 张成的子空间).

对 $y_0 \in E - M$,今证必有元 $x', x'' \in M$,使 $x' \leqslant y_0 \leqslant x''$.

事实上,因 M 至少包含P 中的一个内点 u_0,且 P 为体锥,所以 $\exists \rho > 0$,使 $\bar{S}(u_0,\rho) \subset P$,于是

$$u_0 \pm \rho \frac{y_0}{\|y_0\|} \in \bar{S}(u_0,\rho) \subset P,$$

所以

$$u_0 \pm \rho \frac{y_0}{\|y_0\|} \geqslant \theta,$$

于是

$$-\frac{\|y_0\|}{\rho} u_0 \leqslant y_0 \leqslant \frac{\|y_0\|}{\rho} u_0.$$

取

$$x' = -\frac{\|y_0\|}{\rho} u_0, x'' = \frac{\|y_0\|}{\rho} u_0,$$

由 $u_0 \in M$ 且 M 为线性子空间知：$x', x'' \in M$. 再由 f 是 M 上的正泛函，从而必定单增知：$f(x') \leqslant f(x'')$，因此对任意满足 $x' \leqslant y_0 \leqslant x''$ 的元 x', x''，有：

$$\sup f(x') \leqslant \inf f(x''),$$

存在实数 ξ，使

$$\sup f(x') \leqslant \xi \leqslant \inf f(x'').$$

现定义线性子空间 M_0 上的泛函 φ 为：

$$\forall\, y = x + \lambda y_0 \in M_0, \quad \varphi(y) = f(x) + \lambda \xi.$$

因为 $y_0 \notin M$，又 M_0 中的元素 y 惟一确定了 x 和 λ，所以 M_0 中每个元 y 可惟一地表成 $x + \lambda y_0$ 的形式，据 Hahn - Banach 定理的证明知，φ 是 M_0 上惟一定义的线性泛函.

下证 φ 是正泛函（即正的、有界的线性泛函）.

先证由 $y = x + \lambda y_0 \geqslant \theta \Rightarrow \varphi(y) = \varphi(x + \lambda y_0) \geqslant 0$.

若 $\lambda > 0$，则 $-\frac{x}{\lambda} \leqslant y_0$，因为 $x \in M$ 且 M 为线性子空间，故

$$-\frac{x}{\lambda} \in M,$$

由此可得：

$$-\frac{1}{\lambda} f(x) = f\left(-\frac{x}{\lambda}\right) \leqslant \sup f(x') \leqslant \xi.$$

若 $\lambda < 0$，则有 $y_0 \leqslant -\frac{x}{\lambda}$，又得

$$\xi \leqslant \inf f(x'') \leqslant f\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = -\frac{1}{\lambda} f(x).$$

因此对任意的 $\lambda \in R$ 均有 $f(x) + \lambda \xi \geqslant 0$，即 $\varphi(y) \geqslant 0$.

再证 φ 是有界线性泛函.

对 $u_0 \in P^\circ$，$\exists$ 有理数 $\rho_1 > 0$，使 $\bar{S}(u_0, \rho_1) \subset P$，故当 $\| e \| \leqslant 1$ 时，有

$$u_0 + \rho_1 e \in P, \text{即 } u_0 + \rho_1 e \geqslant \theta,$$

由以上证明知：

$$\varphi(u_0+\rho_1 e)=\varphi(u_0)+\rho_1\varphi(e)\geqslant 0,$$

从而 $|\varphi(e)|\leqslant\frac{1}{\rho_1}\varphi(u_0)$,说明 φ 在 M_0 单位球上有界,从而是有界线性泛函.

因此,这样定义的泛函 φ 确是正泛函.

又从定义

$$\varphi(y)=f(x)+\lambda\xi(y=x+\lambda y_0\in M_0),$$

可见,当 $y=x\in M$ 时,对应的 $\lambda=0$,故有 $\varphi(x)=f(x)$.

因此,φ 确是正泛函 f 从 M 到 M_0 的延拓. #

系:设 P 为 Banach 空间 E 中的体锥,$P\neq E$,则必有一个按 P 为正的非零有界线性泛函存在. #

证 设 $u_0\in P^{\circ}$,据锥的定义 $-u_0\notin P$,令

$$M=\{\lambda u_0\mid\lambda\in R\},$$

则 M 是一线性子空间,在 M 上定义正泛函为:

$$f(\lambda u_0)=\lambda(\lambda u_0\in P),$$

则由 $\lambda u_0\geqslant\theta\Rightarrow\lambda\geqslant 0$,由定理 3.4.4 知,$f$ 可延拓成整个空间 E 上的依 P 为正的非零有界线性泛函. #

定义 3.4.2 设 X 为实(或复)数域 F 上的线性空间,若对每个 $x\in X$,总有一个确定的实数 $\|x\|$ 满足:

(1) $\|x\|\geqslant 0$; $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=\theta$;

(2) $\|-x\|=\|x\|$,并且 $\lim\limits_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0$, $\lim\limits_{\|x_n\|\to 0}\|\alpha x_n\|=0$;

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

则称 $\|x\|$ 为 X 上的**准范数**,称 X 为**赋准范的线性空间**.

注:显然,赋准范线性空间包含赋范线性空间.

定义 3.4.3 赋准范线性空间 E 中子集 P 叫做**线性半群**,是指:

(1) $x\in P,\lambda\geqslant 0(\lambda\in R)\Rightarrow\lambda x\in P$;

(2) $x\in P,y\in P\Rightarrow x+y\in P$.

定义 3.4.4 赋准范线性空间中线性半群 P 叫做**非不足道的**,

是指存在一元 $x \in P$,使 $-x \notin P$.

注:线性半群是赋准范线性空间的子集,而锥则是 Banach 空间中的闭凸集.从定义可见,锥必是线性半群,反之不然.但定理 3.4.4 及其系中的锥 P 改为实心线性半群(即 $P^\circ \neq \varnothing$)时,结论仍然成立.

定理 3.4.5 设 P_1 是 Banach 空间 E 中的实心线性半群,P_2 是 E 中的任意线性半群,$P_2 \cap P_1^\circ = \varnothing$,则 $\exists f \in E^*$ 且 $f \neq \theta$,使

$$x \in P_1 \Rightarrow f(x) \geqslant 0, x \in P_2 \Rightarrow f(x) \leqslant 0.$$

证 记 $P = \{x - y \mid x \in P_1, y \in P_2\}$,则 P 为线性半群.

事实上,① 当 $x \in P$ 时,$\exists x_1 \in P_1, y_1 \in P_2$,使 $x = x_1 - y_1$,对 $\lambda \geqslant 0, \lambda x = \lambda x_1 - \lambda y_1$,而 $\lambda x_1 \in P_1, \lambda x_2 \in P_2$,所以 $\lambda x \in P$.

② 当 $x \in P$ 时,$\exists x_1 \in P_1, y_1 \in P_2$,使 $x = x_1 - y_1$,当 $y \in P$ 时,$\exists x_2 \in P_1, y_2 \in P_2$,使 $y = x_2 - y_2$,故

$$x + y = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2),$$

据线性半群定义知:

$$x_1 + x_2 \in P_1, y_1 + y_2 \in P_2,$$

所以 $x + y \in P$,因此 P 为线性半群.

又从 P 的作法知 $P \supset P_1$,故 P 也是有内点的,即 $P^\circ \neq \varnothing$.

再证 $P \neq E$.取 $x_0 \in P_1 \subset P$,并设 $x_0 \in P_1^\circ$,则必定 $-x_0 \notin P$.否则,若 $-x_0 \in P$,$\exists x_1 \in P_1, y \in P_2$ 使

$$-x_0 = x_1 - y, \text{即 } y = x_0 + x_1.$$

由 $x_0 \in P_1^\circ$ 知 $\exists \delta > 0$,当 $\|x - x_0\| < \delta$ 时,有 $x \in P_1$,对上述 $x_1 \in P_1$,当 $\|x - x_0 - x_1\| < \delta$ 时,有 $x - x_1 \in P_1$,进而 $x = x_1 + (x - x_1) \in P_1$,从而当

$$\|x - (x_0 + x_1)\| = \|x - y\| < \delta$$

时,$y \in P_1^\circ$,与 $P_2 \cap P_1^\circ = \varnothing$ 矛盾.这样就证明了当 $x_0 \in P$ 时,$-x_0 \notin P$.因为 E 是 Banach 空间,若 $x_0 \in E$ 时,必有 $-x_0 \in E$,可见 $P \neq E$.

由定理 3.4.4 的系知,在 E 上存在一个按 P 为正的非零有界线

性泛函 f,使 $z \in P$ 时,$f(z) \geqslant 0$.

从 $z = x - y \in P$ 中取 $y = \theta \in P_2$,则对 $\forall x \in P_1$,

$$z = x \in P \Rightarrow f(x) \geqslant 0,$$

取 $x = \theta \in P_1$,对 $\forall y \in P_2$,

$$z = -y \in P \Rightarrow f(-y) \geqslant 0 \Rightarrow f(y) \leqslant 0. \quad \#$$

系:设 P 是 Banach 空间 E 中的实心线性半群,$P \neq E$,M 是 E 中线性子空间,且 $M \cap P^{\circ} = \varnothing$,则在 E 上必存在一个正的线性泛函 $f \neq \theta$,使 $x \in M$ 时,$f(x) = 0$.

证 M 看做定理 3.4.5 中的 P_2,P 看做 P_1,据定理 3.4.5 知 $\exists f \in E^*$,$f \neq \theta$,且 f 按 P 为正的,使当 $x \in P$ 时,$f(x) \geqslant 0$,当 $x \in M$ 时,$f(x) \leqslant 0$,但 $x \in M \Rightarrow -x \in M$,故

$$f(-x) \leqslant 0 \Rightarrow f(x) \geqslant 0,$$

从而 $x \in M \Rightarrow f(x) = 0$.

定理 3.4.6 设 P 是线性半群. $x_0 \in E$,且

$$\inf_{z \in P} \| x_0 - z \| = d > 0$$

(即点 x_0 到集 P 的距离 $d > 0$),于是必 $\exists f \in P^*$,$f \neq \theta$,使

$$f(x_0) \leqslant -d \| f \|.$$

又若 P 是实心线性半群,而 y_0 是 P 的界点,且 $y_0 \in P$,则必存在非零正线性泛函 f,使 $f(y_0) = 0$.

证 令 $P_1 = \{\lambda(x_0 + u) \mid \lambda > 0, \| u \| < d\}$,
则 P_1 为实心线性半群. 事实上,$\forall y \in S(x_0, d)$,则有

$$\| y - x_0 \| < d,$$

记 $y - x_0 = u$,则有

$$y = x_0 + (y - x_0) = x_0 + u \in P_1,$$

所以 $S(x_0, d) \subset P_1$,即 P_1 是实心的.

又 ① 当 $t = \lambda(x_0 + u) \in P_1 (\lambda > 0, \| u \| < d)$ 时,对 $\mu \geqslant 0$ 自然有

$$\mu t = \lambda \mu (x_0 + u) \in P_1;$$

② 对 $t = \lambda(x_0 + u) \in P_1, \tau = \mu(x_0 + v) \in P_1(\lambda, \mu > 0, \|u\| < d, \|v\| < d)$ 有

$$t + \tau = \lambda(x_0 + u) + \mu(x_0 + v)$$
$$= (\lambda + \mu)(x_0 + \frac{\lambda u + \mu v}{\lambda + \mu}) \in P_1,$$

(因为 $\lambda + \mu > 0$,又

$$\|\lambda u + \mu v\| < \lambda\|u\| + \mu\|v\| < (\lambda + \mu)d,$$

即
$$\|\frac{\lambda u + \mu v}{\lambda + \mu}\| < d)$$

故 P_1 是线性半群.

又 $P_1 \cap P = \{\theta\}$,若不然,设

$$\theta \neq \lambda(x_0 + u) \in P_1 \cap P \overset{\text{由}\lambda>0}{\Rightarrow} x_0 + u \in P.$$

记 $z = x_0 + u \in P$,则 $x_0 - z = -u$,于是

$$\|-u\| = \|x_0 - z\| < d(x_0 \in E, z \in P),$$

但 d 是所有 $\|x_0 - z\|(x_0 \in E, z \in P)$ 的最小者即与 $d = \inf\limits_{z \in P}\|x_0 - z\|(x_0 \in E)$ 矛盾.

据 $P_1 \cap P = \{\theta\}$ 即知$P_1^\circ \cap P = \varnothing$,据定理 3.4.5,存在 $f \in E^*$,它按 P 为正,使 $\lambda(x_0 + u) \in P_1$ 时,$f(\lambda(x_0 + u)) \leqslant 0$,即 $f(x_0) \leqslant -f(u)$,从而

$$f(x_0) \leqslant \inf[-f(u)] = \sup_{\|u\|<d} f(u) = -d\|f\|.$$

设 P 是实心线性半群,而 y_0 是 P 的界点,且 $y_0 \in P$.令

$$P_2 = \{\lambda y_0 \mid \lambda \geqslant 0\},$$

则 $P_2 \cap P^\circ = \varnothing$.若不然,由 $\lambda_0 y_0 \in P^\circ$ 可证得 $y_0 \in P^\circ$,这与 y_0 是 P 的界点矛盾.据定理 3.4.5 知,存在按 P 为正的线性泛函 f,使

$$f(\lambda y_0) \leqslant 0(\lambda > 0) \Rightarrow f(y_0) \leqslant 0,$$

但 $y_0 \in P$,故 $f(y_0) \geqslant 0$,从而 $f(y_0) = 0$. #

系 1:设 P 是线性半群,$x \in P \Leftrightarrow \forall f \in P^* \Rightarrow f(x) \geqslant 0$.

证 充分性:用反证法.设 $x \notin P$,由上述定理知,$\exists f_0 \in P^*$,

$f_0 \neq \theta$,使 $f_0(x) < 0$,与题设矛盾,故 $x \in P$.

必要性是显然的. #

因此,若特别设 E 是自反 Banach 空间,而 P 是 E 中闭线性半群时,据系 1 知

$$x \in P \Leftrightarrow f \in P^* \Rightarrow f(x) \geqslant 0.$$

系 2:设 P 是实心线性半群,x 是 P 的内点的充要条件是 $\forall f \in P^*$,有 $f(x) > 0$.

证 必要性:设 $x \in P^\circ$,类似于定理 3.4.4 的系的证明过程可知,$\forall f \in P^*$,有 $f(x) > 0$.

充分性:用反证法. 设 $x \notin P^\circ$,据本定理知,$\exists f_0 \in P^*$,使 $f_0(x) = 0$,与假设矛盾. #

定理 3.4.7 设 $P \subset E$ 是非不足道的闭线性半群,而 $x_0 \in P$,$-x_0 \notin P$. 则必存在正线性泛函 $f \in P^*$,使 $f(x_0) > 0$.

证 因 $-x_0 \notin P$,而 P 是闭的,故由点到有界闭集的距离必大于零知

$$\inf_{z \in P} \| -x_0 - z \| > 0.$$

于是据定理 3.4.6 知,存在一个按 P 为正的线性泛函,使

$$f(-x_0) \leqslant -d \| f \| < 0,$$

从而 $f(x_0) > 0$. #

为了证明共轭锥 P^* 具有非零元,我们需要考察凸集的隔离性原理.

定义 3.4.5 设 E 为 Banach 空间,$f \in E^* - \{\theta\}$,$r \in R^1$,称子集

$$H = \{x \in E \mid f(x) = r\}$$

为 E 的一个**超平面**,而称子集

$$H^r(f) = \{x \in E \mid f(x) \geqslant r\}, H_r(f) = \{x \in E \mid f(x) \leqslant r\}$$

为由超平面 H 所确定的**半空间**,它们分别位于 H 的两侧.

又设 A, B 为 E 的两个子集,若有超平面 H,使 A 位于 H 的一

侧,B 位于H 的另一侧,即 A,B 分别位于由H 所确定的两个半空间之中,则称 A,B **被超平面H 所分离**.若还有 $A\cap H=\varnothing,B\cap H=\varnothing$,则称 A,B **被超平面H 严格分离**.

若E 的子集A 位于超平面H 的一侧,且$H\cap A\neq\varnothing$,则称H是A 的**支撑超平面**.

注:定义中的 f 是有界线性泛函,而定义中的超平面实际上是闭超平面.

可以证明,线性半群的每个闭支撑超平面 $f(x)=r$ 必可表为形状 $f(x)=0,f\in P^*$.

定理 3.4.8 (**Ascoli - Mazur1**) 设 E 是赋范线性空间,$G=M+v_0,v_0\in E,M$ 是E 中的线性子空间.设凸集 $A\subset E$ 且$A^\circ\neq\varnothing$,又设 $G\cap A^\circ=\varnothing$,则必存在一个包含 G 的闭超平面H,使 A 在H 的一侧.

证 根据凸集的平移不变性,不妨使用一个平移:$x'=x-v_0$,可设 G 是线性子空间.令 $P=\{\lambda z\mid\lambda\geqslant 0,z\in A^\circ\}$,下证 P 是线性半群.

线性半群定义中的性质(1) 是显然的.来证性质(2),即证:如果 $z_1,z_2\in A^\circ,\lambda_1\geqslant 0,\lambda_2\geqslant 0$,则

$$\lambda_1z_1+\lambda_2z_2=(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\lambda_1z_1+\lambda_2z_2}{\lambda_1+\lambda_2},\quad \frac{\lambda_1z_1+\lambda_2z_2}{\lambda_1+\lambda_2}\in A^\circ.$$

事实上,设 $S(z_1,\rho_1)\subset A,S(z_2,\rho_2)\subset A,\rho_1,\rho_2>0$,则令

$$x_0=\frac{\lambda_1z_1+\lambda_2z_2}{\lambda_1+\lambda_2},\quad \rho_0=\frac{\lambda_1\rho_1+\lambda_2\rho_2}{\lambda_1+\lambda_2},$$

必有 $S(x_0,\rho_0)\subset A$,这是因为,若 $y-x_0=u,\|u\|\leqslant\rho_0$,令

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\mu_1,\quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}=\mu_2,$$

则
$$\mu_1+\mu_2=1,\quad \rho_0=\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2,$$
$$\begin{aligned}y&=x_0+u=\mu_1z_1+\mu_2z_2+u\\&=\mu_1(z_1+\frac{\rho_1}{\rho_0}u)+\mu_2(z_2+\frac{\rho_2}{\rho_0}u),\end{aligned}$$

$$z_1 + \frac{\rho_1}{\rho_0}u \in A, z_2 + \frac{\rho_2}{\rho_0}u \in A,$$

故 $y \in A$.这也正是说,

$$S(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \rho_0(\lambda_1 + \lambda_2)) \subset P, \quad \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in P^{\circ}.$$

显然 $A^{\circ} \subset P$,从而若能证 $P \neq E$,则 P 必是一个非不足道实心线性半群.

其实,若 $z = \lambda_1 x_1 \in P(\lambda_1 > 0)$,则 $-z \notin P$,因为否则

$$-z = \lambda_2 x_2, \lambda_2 > 0, x_2 \in A^{\circ},$$

依上所证,

$$\theta = z - z = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in P^{\circ},$$

即 θ 是 P 的内点,但 $\theta \in G$ 与假设矛盾,故 P 是非不足道实心线性半群.

设 $z = \lambda x \in P, x \in A^{\circ}$,又设 $z \in G$,则 $\lambda = 0$,因为否则 $x = \frac{z}{\lambda} \in G$,而 G 包含 A 之内点,与所设矛盾.故 $P^{\circ} \cap G = \varnothing$.据定理 3.4.5 的系,$\exists f \in E^*, f \neq \theta, x \in P \Rightarrow f(x) > 0$,特别

$$x \in A \Rightarrow f(x) \geqslant 0, f(G) = 0.$$

于是 $H = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$ 就是所求的超平面. #

定理3.4.9 (**Eidelheit**)设 $A_1{}^{\circ}$ 是赋范线性空间 E 中的凸集,且 $A_1{}^{\circ} \neq \varnothing$,而 A_2 是 E 中的凸集,$A_2 \cap A_1{}^{\circ} = \varnothing$.则必存在一个超平面 $H = \{x \mid f(x) = r\}$ 分离 A_1 与 A_2.亦即使

$$x_1 \in A_1 \Rightarrow f(x) \geqslant r, \quad x \in A_2 \Rightarrow f(x) \leqslant r.$$

证 令 $A = \{x - y \mid x \in A_1{}^{\circ}, y \in A_2\}$,则 A 必是有内点的凸集.事实上,设

$$z_1 = x_1 - y_1 \in A, z_2 = x_2 - y_2 \in A,$$

$$x_1, x_2 \in A_1{}^{\circ}, y_1, y_2 \in A_2,$$

并令 λ 是一个数,且 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$,则

$$\lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2 = [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2]$$

$$-[\lambda y_1+(1-\lambda)y_2]\in A.$$

因为依定理3.4.8的证明，A_1° 也是非空凸集，于是 A 为凸集，且 A 是非空开集，这是因为 $A=\bigcup_{-z\in A_2}(A_1^\circ+z)$ 是非空开集的并. 又 $\theta\notin A$，因为否则 $\exists x_0\in A_1^\circ, y_0\in A_2$，使 $x_0-y_0=\theta$，即 $x_0=y_0$ 与假设 $A^\circ\cap A_2=\varnothing$ 矛盾. 用 $\{\theta\}$ 代替定理3.4.8中的 G，用 A 代替那里的 A，可知存在一个过 θ 点的闭超平面

$$H=\{x\mid f(x)=0\}(f\in E^*),$$

使

$$x\in A\Rightarrow f(x)\geqslant 0,$$

即

$$x\in A_1^\circ, y\in A_2\Rightarrow f(x)\geqslant f(y),$$

从而

$$f(x)\geqslant\sup_{y\in A_2}f(y),$$

但 $A_1\subset\bar{A}_1$，对于含内点的凸集 A_1，来证 $\bar{A}_1=\bar{A}_1^\circ$.

设 $x_0\in A_1^\circ, x_1\in\bar{A}_1$，今证

$$y=\lambda x_0+(1-\lambda)x_1(0<\lambda<1)\Rightarrow y\in A_1^\circ.$$

我们要证当 $\|z-y\|$ 足够小时，$z\in A_1$. 但 A_1 是凸集，只要能证明 $z=\lambda w+(1-\lambda)u$，而 $w,u\in A_1$ 就够了. 注意到:

$$\begin{aligned}\|w-x_0\|&=\left\|\frac{z}{\lambda}-\frac{(1-\lambda)}{\lambda}u-\frac{y}{\lambda}+\frac{(1-\lambda)}{\lambda}x_1\right\|\\&\leqslant\frac{1}{\lambda}\|z-y\|+\frac{1-\lambda}{\lambda}\|x_1-u\|.\end{aligned}$$

取 $\|z-y\|\leqslant\frac{\lambda}{2}\rho$，再取 $u\in A_1$，使 $\|x_1-u\|\leqslant\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{\rho}{2}$，后者可能，因为 $x_1\in\bar{A}_1$，于是 $\|w-x_0\|\leqslant\rho$，故 $w\in A_1$，从而 $y\in A_1^\circ$.

今设 $y_1\in\bar{A}_1, y_0\in A_1^\circ$，则依上述，

$$y\equiv\lambda y_0+(1-\lambda)y\in A_1^\circ,$$

但 $y_1=y+\lambda(y_1-y_0)$，取 λ 足够小，使 $\|\lambda(y_1-y_0)\|\leqslant\varepsilon$，于是

$y \in S(y_1, \varepsilon) \cap A^\circ$,由 ε 的任意性知,$y_1 \in \bar{A}_1{}^\circ$,故 $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_1{}^\circ$,而 $\bar{A}_1{}^\circ \subset \bar{A}_1$ 是显然的,所以 $\bar{A}_1 = \bar{A}_1{}^\circ$.

由 f 的连续性可知

$$f(x) \geqslant \sup_{y \in A_2} f(y),$$

对于每个 $x \in A_1$ 成立,即

$$\inf_{x \in A_1} f(x) \geqslant \sup_{y \in A_2} f(y),$$

取一数 r 介于上述不等式两边的数之间,于是

$$x_1 \in A_1 \Rightarrow f(x) \geqslant r, \quad x \in A_2 \Rightarrow f(x) \leqslant r. \quad \#$$

将定理3.4.4至定理3.4.9及其系中的线性半群 P 改为锥 P,结论自然全都成立.

定理 3.4.10　设 E 是 Banach 空间,P 是 E 中的闭锥,P^* 是 P 的共轭锥,则

(1) $P^* \neq \{\theta\}$;

(2) $x \in P \Leftrightarrow f(x) \geqslant 0, \forall f \in P^*$;

(3) 对每个 $x \in P - \{\theta\}$,$\exists f \in P^*$ 使得 $f(x) > 0$.

证　(1) 取 $x_0 \in E - P$,则存在 x_0 的 ε 邻域 $B(x_0, \varepsilon)$,使得 $B(x_0, \varepsilon) \cap P = \varnothing$,利用定理 3.4.9,存在非零的有界线性泛函 f,以及常数 r,使得

$$f(x) < r, \forall x \in B(x_0, \varepsilon); f(x) \geqslant r, \forall x \in P.$$

由于 $\lambda P \subset P, \lambda \geqslant 0$,故当 $x \in P, \lambda \geqslant 0$ 时,

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \geqslant r,$$

取 λ 充分大和充分小可分别推得 $f(x) \geqslant 0$ 以及 $r \leqslant 0$,因此,$f \in P^*$,且 $f \neq \theta$.

(2) 与(3) 由定理3.4.6的系1与系2立即可知,但这里,我们用另外一种方式给出它的证明.

(2) 显然由定义可直接推得,若 $x \in P$,则对任何 $f \in P^*$,有 $f(x) \geqslant 0$;反过来,若 $x \notin P$,则由(1) 的证明可知,存在 $f \in P^*$,使得 $f(x) < r \leqslant 0$.

(3) 若 $x \in P - \{\theta\}$,则 $-x \notin P$,同样由(1)的证明可知,存在 $f \in P^*$,使得 $f(-x) < r \leqslant 0$,从而有 $f(x) > 0$.　#

这样,我们就解决了 P^* 中确有非零元存在的问题,从而使建立的共轭锥 P^* 具有实质性意义.

第四章　增算子与凹算子方程的正解

从 Banach 压缩映照原理的证明过程可知，算子 A 的压缩性可推出迭代列 $x_n = Ax_{n-1}$ 收敛到 A 的不动点 x^*，而不动点的惟一性也是直接从算子 A 的压缩性得来的.

值得注意的是：算子 A 的压缩性只是迭代列 $x_n = Ax_{n-1}$ 收敛到 A 的不动点的充分条件，而非必要条件. 对某些非压缩算子 A，迭代列 $x_n = Ax_{n-1}$ 仍有可能收敛到算子 A 的不动点 x^*.

对于这类不具压缩性的算子，我们仍需考虑其不动点的存在惟一性. 事实上，u_0 - 弱凹算子、u_0 - 凹算子、一致 u_0 - 凹算子这三类非线性算子在通常的距离意义下是非压缩的，并且它们也不是连续算子，这三类算子的凹性一个比一个更强，对其不动点的存在性及其逼近的探讨十分重要，本章以及下一章则主要研究这几种不具压缩性的凹算子类的不动点理论.

§4.1　拟凹算子与增算子的不动点

本节先引入拟凹算子的概念，并讨论其不动点的逼近问题.

定义 4.1.1　设算子 $A:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$，又若 $\frac{Ax}{x}$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上严格单调减少，则称算子 A 是**拟凹算子**.

如此引入的拟凹算子 A 实际上是一个函数 $f(x)$.

拟凹算子的几何意义是：在任一区间 $[0,x_0]$ 上，$f(x)$ 图像中的点均位于过原点 $(0,0)$ 与点 $(x_0,f(x_0))$ 的直线上方.

如此引入的拟凹算子类不空.

例 4.1.1 定义在$[0,+\infty)$上的严格凹的非负函数$f(x)$是拟凹的.

证 (1) 因为$f(x)$是定义在$[0,+\infty)$上的非负函数,所以$f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$,且$f(0)\geqslant 0$.

(2) 当$0<x_1<x_2$时,有$0<\lambda<1$,使$x_1=\lambda x_2$,据严格凹得

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(\lambda x_2) = f[\lambda x_2+(1-\lambda)\cdot 0] \\ &> \lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(0) \\ &\geqslant \lambda f(x_2) = \lambda x_2\cdot\frac{f(x_2)}{x_2} \\ &= x_1\cdot\frac{f(x_2)}{x_2}, \end{aligned}$$

所以$\dfrac{f(x_1)}{x_1}>\dfrac{f(x_2)}{x_2}$,故$f(x)$是拟凹的. #

注:非负连续凹泛函$f:K\to[0,+\infty)$,所谓凹是指:$\forall\, x,y\in K,0\leqslant\lambda\leqslant 1$,有:

$$f[\lambda x+(1-\lambda)y]\geqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y).$$

定义 4.1.2 设算子$A:D\to E$,其中D是Banach空间E的某子集,若$x_1,x_2\in D,x_1\leqslant x_2\Rightarrow Ax_1\leqslant Ax_2$,则称$A$是$D$上的**增算子**.

定理 4.1.1 设A是连续的拟凹算子,且是增算子.若A具有正的不动点,则对任何$x_0>0$,作迭代列:$x_n=Ax_{n-1}(n=1,2,\cdots)$都必有:

$$\|x_n-x^*\|\to 0(n\to\infty).$$

证 若$0<x_0\leqslant x^*$,x^*为A的不动点.

因为A为增算子,所以$x_1=Ax_0\leqslant Ax^*=x^*$.

据拟凹性有:

$$\frac{Ax_0}{x_0}>\frac{Ax^*}{x^*}=1,$$

所以 $x_1 = Ax_0 > x_0$,故 $x_0 < x_1 \leqslant x^*$.

由归纳法得

$$x_{n-1} < x_n \leqslant x^*.$$

若 $0 < x^* \leqslant x_0$,类似可得 $x^* \leqslant x_n \leqslant x_{n-1}$.

总之,迭代列 $\{x_n\}$ 是一以 x^* 为上界或下界的单调有界数列,从而必有极限,于是在 $x_n = Ax_{n-1}$ 的两边,令 $n \to \infty$ 取极限,再由 A 的连续性,即得 $x^* = Ax^*$,从而有 $\| x_n - x^* \| \to 0 (n \to \infty)$. #

注:拟凹算子 A 不仅在$[0, +\infty)$上可以不满足压缩条件,甚至当 A 在不动点 x^* 附近连续可微,且 $A'(x^*) = 1$ 时,它在 x^* 的任何邻域内均不可压缩.因为这时我们总能在 x^* 的任何邻域内选择

$$\alpha_n < x^* < \beta_n (n = 1,2,\cdots), \alpha_n \to x^*, \beta_n \to x^* (n \to \infty),$$

使

$$\lim_{n \to \infty} \frac{A\beta_n - A\alpha_n}{\beta_n - \alpha_n} = A'(x^*) = 1,$$

由上式必定得不到

$$\| A\beta_n - A\alpha_n \| \leqslant q \| \beta_n - \alpha_n \| \quad (0 < q < 1).$$

以下主要讨论非线性增算子 A 至少存在一个非零不动点的条件.这个问题的解决,基于如下一种简单的想法:如果算子 A 在区间 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 内有不动点 x^*,则可设法取较 x^*“小”一点的元素 u_0,根据 A 的单调性,构造序列

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots,$$

再取较 x^*“大”一点的元素 v_0,再根据 A 的单调性,构造序列

$$v_0 \geqslant v_1 \geqslant v_2 \geqslant \cdots \geqslant v_n \geqslant \cdots,$$

如果 $v_n - u_n \to 0$,自然可认为通过这套办法“压挤”出算子 A 的一个不动点.

定理4.1.2 若Banach空间 E 中的序区间 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 上的增算子 $A: \langle u_0, v_0 \rangle \to \langle u_0, v_0 \rangle$,则要使 A 在 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 上至少存在一个不动点,只须满足下面两个条件之一:

(1) 锥 P 正规,增算子 A 全连续;

(2) 锥 P 正则,增算子 A 连续.

证 因为 A 为增算子，且 $A:\langle u_0, v_0\rangle \to \langle u_0, v_0\rangle$，故有

$$u_0 \leqslant Au_0, \quad Av_0 \leqslant v_0.$$

作迭代列：$u_n = Au_{n-1}, v_n = Av_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$，则有

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0.$$

(1) 由于 P 正规，因此序区间 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中的迭代列 $\{u_n\}$ 依范数有界. 据算子 A 的全连续性，必有子序列 $\{u_{n_k}\}$ 存在，使 $\{Au_{n_k}\}$ 即 $\{u_{n_k+1}\}$ 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中收敛，故 $u_{n_k+1} \to x_*(k \to \infty)$. 显然

$$u_n \leqslant x_* \leqslant v_n(n = 1,2,\cdots).$$

当 $m > n_k + 1$ 时有

$$\theta \leqslant x_* - u_m \leqslant x_* - u_{n_k+1},$$

故由定理 3.3.1.(4°) 知

$$\| x_* - u_m \| \leqslant N \| x_* - u_{n_k+1} \|,$$

由此即得

$$x_* = \lim_{m\to\infty} u_m.$$

在 $u_m = Au_{m-1}$ 两边，令 $m \to \infty$ 取极限，注意到算子 A 的连续性，得 $x_* = Ax_*$，故 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中至少存在一个不动点 x_*.

(2) 由不等式：

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_0$$

可知，迭代列 $\{u_n\}$ 是一个序单调且序有界的点列，由锥 P 的正则性，$\exists x_* \in E$，使 $\lim_{n\to\infty} u_n = x_*$，因序区间 $\langle u_0, v_0\rangle$ 为闭集，故 $x_* \in \langle u_0, v_0\rangle$.

在 $u_n = Au_{n-1}$ 的两边令 $n \to \infty$，再注意到 A 的连续性，得到 $x_* = Ax_*$，故 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中至少有一个不动点 x_*. #

系：在定理 4.1.2 的条件下，若更设算子 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中的不动点惟一（记为 $\bar{x}$），则以任何 $x_0 \in \langle u_0, v_0\rangle$ 为初值，作迭代 $x_n = Ax_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$ 都有

$$\| x_n - \bar{x} \| \to 0(n \to \infty).$$

证 因为 $u_0 \leqslant x_0 \leqslant v_0$,以增算子 A 反复作用之,得

$$u_n \leqslant x_n \leqslant v_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

已证得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x_*$. 同理可证:$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = x^*$.

由假设不动点惟一,故 $x_* = x^* = \bar{x}$,从而

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \bar{x},$$

又正则锥必是正规的,故据定理 3.3.1.(5°),即有

$$\| x_n - \bar{x} \| \to 0(n \to \infty). \quad \#$$

注:定理 4.1.2 并未限制序区间 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中算子 A 的不动点的惟一性.

例 4.1.2 取 Banach 空间 $E = R^1$,取锥 $P = [0, +\infty)$,则据例 3.3.4 知,锥 P 为正则锥,令

$$Ax = x + \frac{1}{2}\sin x \quad (x \in P),$$

则此算子 A(实际上是函数)是单增的(因其导数为正),也是连续的.

若取 $\langle u_0, v_0\rangle = [\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$,则易知 A 映 $[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$ 入自己,满足定理 4.1.2(2) 的条件,故算子 A 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$ 中存在不动点. 实际上,算子 A 在区间 $[\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\pi]$ 中有三个不动点:$\pi, 2\pi, 3\pi$.

其实,还可去掉定理 4.1.2 中算子 A 连续的假设,但锥 P 的性质要加强.

定理 4.1.3 设 P 是 Banach 空间 E 中的强极小锥,$A:\langle u_0, v_0\rangle \to \langle u_0, v_0\rangle$ 是增算子,则 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中至少有一个不动点.

证 令 $D = \{x \mid u_0 \leqslant x \leqslant v_0, Ax \geqslant x\}$,

显然 $u_0 \in D$,故 D 非空. 又 D 是有上界的(v_0 即是它的一个上界). 于是,根据 P 是强极小的知 $\bar{x} = \sup D$ 存在. 显然:$u_0 \leqslant \bar{x} \leqslant v_0$.

下证 $\bar{x}$ 是 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中的最大不动点.

当 $x \in D$ 时,有 $u_0 \leqslant x \leqslant \bar{x} \leqslant v_0$,从而

$$u_0 \leqslant Au_0 \leqslant Ax \leqslant A\bar{x} \leqslant Av_0 \leqslant v_0.$$

因 $Ax \geqslant x$，故 $x \leqslant A\bar{x}$，因此 $A\bar{x}$ 是D 的一个上界，所以 $\bar{x} \leqslant A\bar{x}$，由此又知 $A\bar{x} \leqslant A(A\bar{x})$，从而 $A\bar{x} \in D$，于是又知 $A\bar{x} \leqslant \bar{x}$，故得 $A\bar{x} = \bar{x}$. 显然，$\bar{x}$ 是A 在$\langle u_0, v_0\rangle$ 中的最大不动点.

同理可证，

$$\bar{x}_0 = \inf G(G = \{x \mid u_0 \leqslant x \leqslant v_0, Ax \leqslant x\})$$

是 A 在$\langle u_0, v_0\rangle$ 中的最小不动点. #

关于增算子的不动点定理，以及建立在此基础上的一些解法，是研究非线性问题的重要的基本工具之一. 为了得到增算子不动点的存在性，如何配置增算子应满足的条件是很值得研究的问题.

从定理 4.1.2 与定理 4.1.3 可以看到，为了除去算子 A 的连续性条件，而将锥 P 的性质逐步加强到强极小，曾有学者提出如下问题：在不要求增算子 A 连续的前提下，是否可在定理 4.1.3 中把锥 P 强极小的条件减弱. 下面我们就来考察这个问题，为此先建立一些概念.

定义 4.1.3　若半序空间 X 中的任何有上界的集D 都具有上确界 $\sup D$，则称 X 为**强极小的半序空间**；

设 X 既是半序空间，又是线性空间，且满足：对任何 $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$，若 $x_1 \leqslant y_1, x_2 \leqslant y_2$ 都有

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \leqslant \alpha y_1 + \beta y_2,$$

其中 α, β 为非负实数，则称 X 为**半序线性空间**.

定理 4.1.4　设 X_1 为半序空间，X_2 为强极小的半序空间，$\langle u_0, v_0\rangle \subset X_1$，$f:\langle u_0, v_0\rangle \to X_2$ 是增算子，$K: X_2 \to X_1$ 是增算子，令 $A = Kf$，如果

$$u_0 \leqslant Au_0, \quad Av_0 \leqslant v_0, \tag{4.1.1}$$

则算子 A 在$\langle u_0, v_0\rangle$ 中必有最大不动点和最小不动点.

证　令　$D = \{x \mid u_0 \leqslant x \leqslant v_0, x \leqslant Ax\}$，

由(4.1.1) 式知 $u_0 \in D$，所以 D 是非空的. 令

$$D_1 = \{f(x) \mid x \in D\} \subset X_2,$$

则 $f(u_0) \in D_1$,所以 D_1 是非空的.又对任意 $y \in D_1$,存在 $x \in D$,使得 $f(x) = y$,因为 $x \leqslant v_0$,f 是增算子,所以 $y = f(x) \leqslant f(v_0)$,从而 D_1 有上界.因为 X_2 为强极小的半序空间,所以 D_1 的上确界存在,令 $y^* = \sup D_1$,则

$$f(u_0) \leqslant y^* \leqslant f(v_0).$$

记 $x^* = Ky^*$,由 K 是增算子及(4.1.1)式知:

$$u_0 \leqslant Au_0 = Kf(u_0) \leqslant x^* = Ky^* \leqslant Kf(v_0) = Av_0 \leqslant v_0.$$

下证 x^* 是算子 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中的不动点.

首先,x^* 是 D 的上界.事实上,当 $x \in D$ 时,$f(x) \leqslant y^*$,则

$$x \leqslant Ax = Kf(x) = Ky^* = x^*;$$

其次 $x^* \in D$.事实上,当 $x \in D$ 时,有 $f(x) \leqslant f(x^*)$,因为 y^* 是 D_1 的上确界,得出 $y^* \leqslant f(x^*)$,又因为 K 是增算子,所以 $Ky^* \leqslant Kf(x^*)$,即 $x^* \leqslant Ax^*$,从而 $x^* \in D$,所以 x^* 是 D 的上确界.又因为 $x^* \leqslant Ax^*$,A 是增算子,所以 $Ax^* \leqslant A(Ax^*)$,即 $Ax^* \in D$.故得 $Ax^* \leqslant x^*$,从而 $Ax^* = x^*$.所以 x^* 是 A 的一个不动点,显然 x^* 是算子 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中的最大不动点.

同理可证,

$$x_* = \inf G(G = \{x \mid u_0 \leqslant x \leqslant v_0, Ax \leqslant x\}$$

是算子 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中的最小不动点. #

更进一步,我们还有下面的定理.

定理 4.1.5 设 X_1 是半序线性空间,X_2 是强极小的半序空间,$\langle u_0, v_0\rangle \subset X_1$,$f_i:\langle u_0, v_0\rangle \to X_2$ 是增算子,$K_i: X_2 \to X_1$ 是增算子 $(i = 1,2)$,令

$$A = K_1 f_1 + K_2 f_2,$$

如果

$$u_0 \leqslant Au_0, \quad Av_0 \leqslant v_0, \tag{4.1.2}$$

则算子 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中必有最大不动点和最小不动点.

证 令 $$D = \{x \mid u_0 \leqslant x \leqslant v_0, x \leqslant Ax\},$$
由(4.1.2)知 $u_0 \in D$,故 D 是非空的,令 $D_1 = f_1(D)$,那么 $D_1 \subset X_2$,且 $f_1(u_0) \in D_1$,所以 D_1 也是非空的. 又对任意的 $x \in D$,$x \leqslant v_0$,由 f_1 的单调性知,$f_1(x) \leqslant f_1(v_0)$,从而 D_1 有上界,由于 X_2 是强极小的,故 D_1 有上确界. 记 $y_1 = \sup D_1$.

同理可知:若 $D_2 = f_2(D)$,则 $D_2 \subset X_2$ 也是非空的且有上确界,记 $y_2 = \sup D_2$. 令

$$x^* = K_1 y_1 + K_2 y_2,$$

则 $x^* \in X_1$,且 $f_1(u_0) \leqslant y_1 \leqslant f_1(v_0)$,

$$f_2(u_0) \leqslant y_2 \leqslant f_2(v_0),$$

由 K_1, K_2 的单调递增性知:

$$K_1 f_1(u_0) \leqslant K_1 y_1 \leqslant K_1 f_1(v_0),$$
$$K_2 f_2(u_0) \leqslant K_2 y_2 \leqslant K_2 f_2(v_0).$$

由 X_1 是半序线性空间及(4.1.2)式知

$$\begin{aligned} u_0 \leqslant Au_0 &= K_1 f_1(u_0) + K_2 f_2(u_0) \\ &\leqslant K_1 y_1 + K_2 y_2 \\ &\leqslant K_1 f_1(v_0) + K_2 f_2(v_0) \\ &= Av_0 \leqslant v_0, \end{aligned}$$

所以 $u_0 \leqslant x^* \leqslant v_0$.

下证 x^* 是算子 A 在 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 中的不动点.

首先,x^* 是 D 的一个上界. 事实上,对任意的 $x \in D$,有

$$f_1(x) \leqslant y_1, \quad f_2(x) \leqslant y_2,$$

由 K_1, K_2 是增算子知:

$$K_1 f_1(x) \leqslant K_1 y_1, \quad K_2 f_2(x) \leqslant K_2 y_2,$$

利用 X_1 是半序线性空间的性质知:

$$x \leqslant Ax = K_1 f_1(x) + K_2 f_2(x) \leqslant K_1 y_1 + K_2 y_2 = x^*,$$

所以 x^* 是 D 的一个上界.

其次 $x^* \in D$,因为对任意的 $x \in D$,由 f_1 和 f_2 是增算子得

$$f_1(x) \leqslant f_1(x^*), \quad f_2(x) \leqslant f_2(x^*),$$

又 y_1, y_2 分别是 $f_1(D)$ 和 $f_2(D)$ 的上确界，所以

$$y_1 \leqslant f_1(x^*), \quad y_2 \leqslant f_2(x^*),$$

从而 $$K_1 y_1 \leqslant K_1 f_1(x^*), \quad K_2 y_2 \leqslant K_2 f_2(x^*),$$

于是 $$K_1 y_1 + K_2 y_2 \leqslant K_1 f_1(x^*) + K_2 f_2(x^*),$$

即 $x^* \leqslant Ax^*$，所以 $x^* \in D$，得出 x^* 是 D 的上确界.

又因为 A 是增算子，而 $x^* \leqslant Ax^*$，所以 $Ax^* \leqslant A(Ax^*)$，从而 $Ax^* \in D$，即 $Ax^* \leqslant x^*$，于是 $x^* = Ax^*$，即 x^* 是 A 的一个不动点，显然 x^* 是算子 A 在 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 中的最大不动点.

同理可证：

$$x^* = \inf G (G = \{x \mid u_0 \leqslant x \leqslant v_0, Ax \leqslant x\})$$

是算子 A 在 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 中的最小不动点. #

定理 4.1.6　设 X_1 是半序线性空间，X_2 是强极小的半序空间，$\langle u_0, v_0 \rangle \subset X_1$，$f_i: \langle u_0, v_0 \rangle \to X_2$ 是增算子，$K_i: X_2 \to X_1$ 是增算子 $(i = 1, 2, \cdots, n)$，令 $A = \sum_{i=1}^{n} K_i f_i$，如果

$$u_0 \leqslant Au_0, \quad Av_0 \leqslant v_0,$$

则算子 A 在 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 中必有最大不动点和最小不动点.

证　仿定理 4.1.5 的证明可得. #

注：定理 4.1.4、定理 4.1.5 与定理 4.1.6 均是定理 4.1.3 的推广，对 X_1 不要求具有拓扑结构，也不要求它是强极小的，特别地，在定理 4.1.5 和定理 4.1.6 中，若 X_1 是半序加群，定理的结论也成立.

将上述定理具体应用于下面的积分方程，则有

例 4.1.3　考察 Hammerstein 型积分方程：

$$\varphi(x) = \int_0^1 k_1(x, y) f_1(y, \varphi(y)) \mathrm{d}y + \int_0^1 k_2(x, y) f_2(y, \varphi(y)) \mathrm{d}y. \tag{4.1.3}$$

令 $$A\varphi(x) = \int_0^1 k_1(x, y) f_1(y, \varphi(y)) \mathrm{d}y$$

$$+\int_0^1 k_2(x,y)f_2(y,\varphi(y))\mathrm{d}y,$$

我们假设:

$(H_1)f_i(x,u)(i=1,2)$ 关于 u 是递增的,且满足 Caratheodory 条件:

(1) 对点集中几乎所有的 x,$f(x,u)$ 是 u 的连续函数;

(2) 对每个 u,$f(x,u)$ 是 x 的可测函数.

(H_2) 存在 $u_0,v_0\in C_{[0,1]}$ 以及 $1\leqslant p<+\infty$,使得 $u_0\leqslant v_0$,$f_iu_0\in L^p_{[0,1]}$,$f_iv_0\in L^p_{[0,1]}(i=1,2)$,且 $u_0\leqslant Au_0,Av_0\leqslant v_0$;

$(H_3)k_i(x,y)(i=1,2):[0,1]\times[0,1]\to R^1$ 是非负函数,并且积分方程

$$K_i\varphi(x)=\int_0^1 k_i(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y\quad(i=1,2)$$

映 $L^p_{[0,1]}$ 入 $C_{[0,1]}$.

则算子 A 在 $C_{[0,1]}$ 中必存在不动点,即方程(4.1.3)必有定义于 $[0,1]$ 上的连续解.

证 令 $F_i\varphi(x)=f_i(x,\varphi(x))$ $(i=1,2)$,那么 $A=K_1F_1+K_2F_2$,由(H_1)知 F_1,F_2 是增算子,由(H_3)知 K_1,K_2 也是增算子,F_1,F_2 映$\langle u_0,v_0\rangle$入 $L^p_{[0,1]}$,K_1,K_2 映 $L^p_{[0,1]}$ 入 $C_{[0,1]}$,而 $L^p_{[0,1]}$ 是强极小的半序空间,$C_{[0,1]}$ 是半序线性空间.由定理4.1.5知,A 在$\langle u_0,v_0\rangle$中有最大不动点与最小不动点,即(4.1.3)式在$[0,1]$上有一个连续的解. #

我们还可在将增算子 A 连续的条件稍作减弱的情况下,讨论其不动点问题.为此,先证下述引理:

引理 4.1.1 (**Asoli - Mazur** 2) 设 P 是实赋范线性空间 E 中的凸集,若 P 在 E 中是闭集,则对 $\forall x_0\notin P$,必存在 $f_0\in E^*$(即 f_0 是连续线性泛函),使

$$\sup_{x\in P}f_0(x)<f_0(x_0).$$

证 必要时只需作一平移,因此不妨设 $\theta\in P$.

设
$$\inf_{x\in P}\|x-x_0\| = \alpha,$$
因 P 是闭集,而 $x_0 \notin P$,所以 $\alpha > 0$.令
$$P_1 = \bigcup_{x\in P}\bar{S}(x,\frac{\alpha}{2}),$$
这里 $\bar{S}(x,\frac{\alpha}{2}) = \{y \mid y \in E, \|x-y\| \leqslant \frac{\alpha}{2}\}$.那么 P_1 是凸集,因为如果 $x_0 \in P_1, y_0 \in P_1$,则必存在元 $x, y \in P$,使
$$\|x-x_0\| \leqslant \frac{\alpha}{2}, \quad \|y-y_0\| \leqslant \frac{\alpha}{2},$$
从而当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时,
$$\|\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 - \lambda x - (1-\lambda)y\|$$
$$\leqslant \lambda\|x_0 - x\| + (1-\lambda)\|y-y_0\| \leqslant \frac{\alpha}{2},$$
而且 $\lambda x + (1-\lambda)y \in P$.因 $\theta \in P_1, x_0 \notin P_1$,所以 P_1 必有一形状如 $x_1 = \beta x_0 (0 < \beta < 1)$ 的边界点,只需取
$$\beta = \sup\{\lambda \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \lambda x_0 \in P_1\}$$
就够了,因为 P_1 是凸集,令
$$h(x) = \inf\{\rho \mid \rho > 0, \frac{x}{\rho} \in P_1\},$$
那么 $h(\alpha x) = |\alpha| \cdot h(x)$,并且因
$$\frac{x}{\rho} \in P_1, \frac{y}{\sigma} \in P_1$$
$$\Rightarrow \frac{x+y}{\rho+\sigma} = \frac{\sigma}{\rho+\sigma}\cdot\frac{x}{\rho} + \frac{\sigma}{\rho+\sigma}\cdot\frac{y}{\sigma} \in P_1,$$
从而不难看出
$$h(x+y) \leqslant h(x) + h(y).$$
又因 $\bar{S}(\theta,\frac{\alpha}{2}) \subset P_1$,可知 $h(x) \leqslant \frac{2}{\alpha}\|x\|$.

如果 $x \in P_1$,那么 $h(x) \leqslant 1$,并且
$$h(x_0) = \frac{1}{\beta}h(x_1) = \frac{1}{\beta} > 1.$$

对于线性子空间

$$E_1 = \{x \mid x = \gamma x_1, -\infty < \gamma < +\infty\},$$

$f_1(\gamma x_1) = \gamma$ 是定义在 E_1 上的线性泛函，并且在 E_1 上 $f_1(x) \leqslant h_1(x)$. 据 Hahn－Banach 定理，f_1 有一在全 E 上的延拓 f_0，使 $f_0(x) \leqslant h(x)(x \in E)$. 特别

$$f_0(x) \leqslant \frac{2}{\alpha} \| x \|,$$

从而 $f_0 \in E^*$，并且

$$\sup_{x \in P} f_0(x) \leqslant \sup_{x \in P_1} f_0(x) \leqslant \sup_{x \in P_1} h(x) \leqslant 1 < \frac{1}{\beta} = f_0(x_0). \quad \#$$

引理 4.1.2 设 P 是实赋范线性空间 E 中的凸集，则 P 为闭集的充要条件是：

$$x_n \in P, \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)(f \in E^*) \Rightarrow x_0 \in P.$$

证 若 $x_n \to x_0(n \to \infty), f \in E^* \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ (即由强收敛 ⇒ 弱收敛)，则据定理的条件，有 $x_0 \in P$. 所以 P 为闭集.

反之，若 P 是闭集，$x_n \in P$，且对 $\forall f \in E^*$，$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$，如果 $x_0 \notin P$，则据引理 4.1.1 知，存在 $f_0 \in E^*$，使

$$\sup_{x \in P} f_0(x) < f_0(x_0).$$

又因为 $f_0(x_n) \leqslant \sup_{x \in P} f_0(x)$，所以

$$\lim_{n \to \infty} f_0(x_n) \leqslant \sup_{x \in P} f_0(x) < f_0(x_0),$$

与 $\lim_{n \to \infty} f_0(x_n) = f_0(x_0)$ 矛盾，所以 $x_0 \in P$. #

注：在弱收敛的意义下，我们可以相应地得到**空间 E 弱完备**、**弱紧**、**算子 A 弱连续**等概念. 算子 A 在点 $x \in D$ 弱连续的充要条件是：对 $\forall x_n \in D, x_n \xrightarrow{弱} x$，均有 $Ax_n \to Ax(n \to \infty)$.

引理 4.1.3 设 P 是实赋范线性空间 E 中的凸闭集，若 E 是弱完备的，则 P 也是弱完备的.

证 设$\{x_n\}$是 P 中的 Cauchy 点列,则$\{x_n\}$自然也是 E 中的 Cauchy 点列.因 E 是弱完备的,故$\{x_n\}$在弱收敛意义下的极限点 $x_0 \in E$.

对 $\forall f \in E^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$,因 P 为凸闭集,由引理4.1.2知,有 $x_0 \in P$,故 P 是弱完备的. #

下面我们不加证明,直接给出著名的Schauder不动点定理,以及 Schauder - Тихонов 不动点定理.

引理 4.1.4 (**Schander 不动点定理**) 设 D 是 Banach 空间 E 中有界凸闭集(D 不一定有内点), $A:D\to E$ 全连续,则 A 在 D 中必具有不动点.

系 1:识 D 是 E 中凸紧集, $A:D\to D$ 连续,则算子 A 在 D 中必具有不动点.

系 2:设 D 是 E 中凸闭集, $A:D\to D$ 连续,并且 $A(D)$ 是相对紧集,则 A 在 D 中必具有不动点.

注 1:当 E 是局部凸线性拓扑空间时,系1的结论也成立,这就是 Schauder - Тихонов 不动点定理.见文献[13].

注 2:定理 4.1.2(1) 还可作如下的简易证明:

因为 P 为正规锥,故序区间$\langle u_0, v_0\rangle$是有界凸闭集.又 A 为全连续算子,映$\langle u_0, v_0\rangle$入自己中的列紧集,据引理4.1.4系2即知,算子 A 在序区间$\langle u_0, v_0\rangle$中必具有不动点. #

定理 4.1.7 设 P 是弱完备的赋范线性空间 E 中的正规锥,且 E 中的单位球弱紧.又设序区间$\langle u_0, v_0\rangle$上的增算子 $A:\langle u_0, v_0\rangle \to \langle u_0, v_0\rangle$,且 A 为弱连续算子,则 A 在$\langle u_0, v_0\rangle$上至少存在一个不动点.

证 因 A 为增算子,且 $A:\langle u_0, v_0\rangle \to \langle u_0, v_0\rangle$,故

$$u_0 \leqslant Au_0, Av_0 \leqslant v_0,$$

记 $u_n = Au_{n-1}, v_n = Av_{n-1} (n = 1,2,\cdots)$,则有

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0.$$

因锥 P 是正规锥，故序区间$\langle u_0, v_0\rangle$是有界凸闭集. 又因单位球弱紧，所以有界凸闭集$\langle u_0, v_0\rangle$ 也弱紧. 当空间 E 弱完备时，据引理4.1.3 知，凸闭集$\langle u_0, v_0\rangle$ 弱完备. 于是弱连续算子 A 映弱紧、弱完备凸集$\langle u_0, v_0\rangle$ 入自己，据推广的 Schauder – Тихонов 不动点定理知，A 在$\langle u_0, v_0\rangle$ 中至少有一不动点.　#

我们还可在保留增算子 A 的连续性条件下，让 A 再满足一个新条件，而将对锥 P 的所有限制都去掉，这从减弱锥 P 条件的方向证明了增算子不动点的存在性.

定理4.1.8　设 P 是Banach空间 E 中的一个锥，$A:\langle u_0, v_0\rangle \to \langle u_0, v_0\rangle$ 连续且是增算子. 此外设算子 A 满足:

$$Ax_n - Ax_m \geqslant \eta(\| x_n - x_m \|)w_0,$$

其中：$n > m, x_n = Ax_{n-1}, x_n \in \langle u_0, v_0\rangle$ $(n = 1,2,\cdots)$. w_0是锥 P 中某固定的非零元素，而 $\eta(r)$ 是关于正数 r 的不减的正连续函数，则算子 A 在$\langle u_0, v_0\rangle$ 中至少存在一个不动点.

证　考虑迭代列：$u_n = Au_{n-1}, v_n = Av_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$.

由于 A 为增算子，且 $A:\langle u_0, v_0\rangle \to \langle u_0, v_0\rangle$，

故必有：
$$u_0 \leqslant Au_0, \quad Av_0 \leqslant v_0,$$
且
$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0.$$

下证左半部的迭代序列：

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_0,$$

即$\{u_n\}$ 收敛(亦即证$\{u_n\}$ 依范数收敛).

用反证法. 设序列$\{u_n\}$ 不收敛，则可选出子列：

$$u_{n_0} \leqslant u_{n_1} \leqslant \cdots \leqslant u_{n_i} \leqslant \cdots \leqslant v_0,$$

使
$$\| u_{n_i} - u_{n_{i-1}} \| \geqslant r_0 > 0 \ (i = 1,2,\cdots).$$

令 $\eta(r_0) = \varepsilon_0 > 0$，据已知条件有：

$$\begin{aligned} u_{n_{i+1}} &\geqslant u_{n_i+1} = Au_{n_i} \geqslant Au_{n_{i-1}} + \eta(\| u_{n_i} - u_{n_{i-1}} \|)w_0 \\ &\geqslant Au_{n_{i-1}} + \eta(r_0)w_0 = u_{n_{i-1}+1} + \varepsilon_0 w_0 \\ &\geqslant u_{n_{i-1}} + \varepsilon_0 w_0, \end{aligned}$$

即
$$u_{n_{i+1}} \geqslant u_{n_{i-1}} + \varepsilon_0 w_0,$$
从而当 $i = 1$ 时,$u_{n_2} \geqslant u_{n_0} + \varepsilon_0 w_0$,

当 $i = 3$ 时,$u_{n_4} \geqslant u_{n_2} + \varepsilon_0 w_0 \geqslant u_{n_0} + 2\varepsilon_0 w_0$.

类推即得
$$u_{n_{2i}} \geqslant u_{n_0} + i\varepsilon_0 w_0 (i = 1,2,\cdots).$$
由于
$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_0,$$
故
$$v_0 \geqslant u_{n_{2i}} \geqslant u_{n_0} + i\varepsilon_0 w_0.$$
由锥的定义知:
$$v_0 - u_{n_0} - i\varepsilon_0 w_0 \in P,$$
又因 $i\varepsilon_0 > 0$,故$\dfrac{v_0 - u_{n_0}}{i\varepsilon_0} - w_0 \in P$.

因 i 可取一切自然数,在上式中令 $i \to +\infty$,则得 $-w_0 \in P$,从而 $w_0 = \theta$ 与已知 w_0 为 P 中某固定非零元矛盾,因此迭代序列 $\{u_n\}$ 收敛.

设收敛点为 x_*,则有 $x_* = \lim\limits_{n \to \infty} u_n$,显然 $u_n \leqslant x_* \leqslant v_0$,即 $x_* \in \langle u_0, v_0 \rangle$. 在 $u_n = Au_{n-1}$ 两边,令 $n \to \infty$ 取极限,再由算子 A 的连续性,即得 $x_* = Ax_*$.

同理可证右半部的迭代列:
$$u_0 \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0,$$
即 $\{v_n\}$ 收敛,记其收敛点为 x^*,则 $x^* = \lim\limits_{n \to \infty} v_n$,此时也有 $x^* \in \langle u_0, v_0 \rangle$,且 $x^* = Ax^*$.

因此算子 A 在 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 中至少有一个不动点. #

另外,我们还可按如下方式来减弱锥 P 的条件:

定理 4.1.9 设 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 为具锥 P 的 Banach 空间 E 中的序区间,算子 A 为连续的增算子,且 A 映 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 入自己的一个紧子集,则 A 在 $\langle u_0, v_0 \rangle$ 上至少有一个不动点.

证　同样，考虑迭代列：

$$u_n = Au_{n-1}, \quad v_n = Av_{n-1}(n = 1,2,\cdots),$$

由于 A 为增算子，且映 $\langle u_0, v_0\rangle$ 入自已，故必有：

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_1 \leqslant v_0.$$

由于象集 $A\langle u_0, v_0\rangle$ 为紧集，故点集 $\{u_n\}$，$\{v_n\}$ 也为紧集，从而它们均收敛. 再由算子 A 的连续性可知，它们收敛的极限即是 A 的不动点.　#

注：在定理的假设条件下，象集 $A\langle u_0, v_0\rangle$ 为紧集，可用 $A^k\langle u_0, v_0\rangle$ 为紧集来代替(其中 k 是一个大于 1 的正整数)，定理的结论仍然成立.

以下再引进拟正规锥的概念，用它来确定 Banach 空间 E 的半序. 在半序空间 E 中，给出一些关于增算子的不动点定理.

定义 4.1.4　设 E 是 Banach 空间，P 是 E 中的锥，如果存在满足 $f(0) = 0$ 的连续增函数，使 $\forall x, y \in P, 0 \leqslant x \leqslant y$，有 $\|x\| \leqslant f(\|y\|)$，则称**锥 P 是拟正规的**.

注：显然，正规锥一定是拟正规的.

在以下这部分内容中，E 表示由拟正规锥 P 来确定半序的半序 Banach 空间.

引理 4.1.5　设 P 是拟正规锥，M 是 E 中的全序子集，则 M 上的范数拓扑与弱拓扑等价.

证　只需证 M 中的闭集一定是 M 中的弱闭集.

设 D 为 M 中的闭集，$\{x_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset D$ 是一个网，在弱拓扑下网收敛于某 $x_0 \in M$，如 $x_0 \notin D$，则由于 D 为闭集，故

$$d = d(x_0, D) > 0,$$

令

$$\{x_\beta \mid \beta \in B\} = \{x_\alpha \mid \alpha \in A, x_\alpha \geqslant \alpha_0\},$$

$$\{x_r \mid r \in C\} = \{x_\alpha \mid \alpha \in A, x_\alpha \leqslant x_0\},$$

则 $\{x_\beta \mid \beta \in B\}$ 与 $\{x_r \mid r \in C\}$ 中至少有一个是 $\{x_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 的子网.

不妨设$\{x_\beta \mid \beta \in B\}$在弱拓扑下网收敛于$x_0$,对每个$\beta \in B$,令

$$F_\beta = \{x \in E \mid x \geqslant x_\beta\}, \quad F = \bigcup_{\beta \in B} F_\beta,$$

易见F为凸集,从而F在范数拓扑F的闭包$\overline{F}$是弱闭的,因为$x_\beta \in F_\beta \subset F$,$\{x_\beta \mid \beta \in B\}$在弱拓扑下网收敛于$x_0$,故$x_0 \in \overline{F}$.

另一方面,固定$\beta \in B$,当$x \in F_\beta$时,有

$$0 \leqslant x_\beta - x_0 \leqslant x - x_0.$$

由于P是拟正规锥,故存在满足$f(0) = 0$的连续递增函数$f(x)$,使得

$$\| x_\beta - x_0 \| \leqslant f(\| x - x_0 \|).$$

由于$x_\beta \in D$,$x_0 \notin D$,故

$$\| x_\beta - x_0 \| \geqslant d > 0.$$

由于单调连续函数的反函数一定存在,且单调连续,故有

$$\| x - x_0 \| \geqslant f^{-1}(\| x_\beta - x_0 \|) \geqslant f^{-1}(d) > 0.$$

$\forall x \in F_\beta$,即$d(x_0, F_\beta) \geqslant f^{-1}(d)$,故

$$d(x_0, f) \geqslant f^{-1}(d),$$

从而

$$d(x_0, F) \geqslant f^{-1}(d) > 0.$$

这与$x_0 \in F$相矛盾,故$x_0 \in D$,从而D为弱闭集. #

引理 4.1.6 若P是拟正规锥,M是E的全序子集,则M列紧的充分条件是M弱列紧.

证 M列紧,则M一定弱列紧.反之,设M是弱列紧集,$\{x_n\}$为M中的任一序列,由M弱列紧,知$\{x_n\}$必有弱收敛子列$\{x_{n_i}\}$,设$x_{n_i} \xrightarrow{\text{弱}} x_0 \in E$,从而$\{x_{n_i}\}$也是弱基本列,$\{x_{n_i}\}$必定依范数收敛于$x_0$,故$M$列紧. #

引理 4.1.7 设P是拟正规锥,$\{x_n\}$为E中的全序点列,$\{x_{n_i}\}$为$\{x_n\}$的全序子列,如果$x_{n_i} \to x_*(i \to \infty)$,则$x_n \to x_*(n \to \infty)$.

证 不妨设$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots$为$E$中的全序点列,$\{x_{n_i}\}$

为$\{x_n\}$的全序子列，$x_{n_i}\to x_*$，显然$x_*\geqslant x_{n_i}(i=1,2,\cdots)$，当$m>n_i$时，有

$$\theta\leqslant x_*-x_m\leqslant x_*-x_{n_i},$$

故 $$\|x_k-x_m\|\leqslant f(\|x_*-x_{n_i}\|)$$

又因当$i\to\infty$时，$x_*-x_{n_i}\to 0$，由于f连续，故有

$$x_*-x_m\to 0(m\to\infty),$$

即$x_n\to x_*(n\to\infty)$. #

引理4.1.8 设P是拟正规锥，$\{x_n\}$是E中的全序列，则$x_n\to x_0$的充要条件是$x_n\xrightarrow{弱}x_0$.

证 必要性显然，下证充分性. 因为$x_n\xrightarrow{弱}x_0$，故$\{x_n\}$是弱列紧集，由引理4.1.6知$\{x_n\}$也是列紧集，故有收敛子列$\{x_{n_i}\}$. 设$x_{n_i}\to x_*$，由引理4.1.7，有$x_n\to x_*$，故$x_n\to x_*$. 又$x_n\to x_0$，所以$x_*=x_0$. 因此$x_n\to x_0(n\to\infty)$. #

引理4.1.9 设P是拟正规锥，则E中任何区间$\langle x_1,x_2\rangle$有界.

证 当$x\in\langle x_1,x_2\rangle$时，有

$$\theta\leqslant x-x_1\leqslant x_2-x_1.$$

由于P是拟正规的，从而

$$\begin{aligned}\|x\|&\leqslant\|x-x_1\|+\|x_1\|\\&\leqslant f(\|x_2-x_1\|+\|x_1\|)=\text{常数},\end{aligned}$$

故$\langle x_1,x_2\rangle$有界. #

注：引理4.1.5、引理4.1.6与引理4.1.8分别是文献[36]中定理1.3及其推论的推广.

定理4.1.10 设$A:\langle u_0,v_0\rangle\to E$为增算子，且$A$将$\langle u_0,v_0\rangle$中的闭集映为$E$中的闭集，又

$$u_0\leqslant Au_0,\quad Av_0\leqslant v_0,$$

而$u_n=Au_{n-1}$，$v_n=Av_{n-1}(n=1,2,\cdots)$. 若$\{u_n\}$、$\{v_n\}$均有收敛子列，则$A$在$\langle u_0,v_0\rangle$中有最大不动点$x^*$与最小不动点$x_*$，且$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$

$= x_*, \lim_{n\to\infty} v_n = x^*$.

证 设$\{u_n\}$的收敛子列为$\{u_{n_i}\}$，$u_{n_i}\to x_*$，$\{v_n\}$的收敛子列为$\{v_{n_i}\}$，$v_{n_i}\to x^*$，由引理4.1.7，有

$$u_n \to x_*, \quad v_n \to x^*.$$

设 $$S = \{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots, x_*\},$$
由于A将闭集映成闭集，故

$$\begin{aligned} AS &= \{Au_0, Au_1, Au_2, \cdots, Au_n, \cdots, Ax_*\} \\ &= \{u_1, u_2, u_3, \cdots, u_{n+1}, \cdots, Ax_*\} \end{aligned}$$

为闭集，且$\lim_{n\to\infty} u_n = x_*$，故$x_* \in AS$，

且$x_* \geqslant u_n$，因此$Ax_* \geqslant u_n (n = 1, 2, \cdots)$，

所以 $$x_* = Ax_*.$$

同理可证 $Ax^* = x^*$.

下证x_*与x^*分别为A在$\langle u_0, v_0\rangle$中的最小与最大不动点.

设$u_0 \leqslant \bar{x} \leqslant v_0$，$A\bar{x} = \bar{x}$. 由于$A$为增算子，故

$$Au_0 \leqslant A\bar{x} \leqslant Av_0, \quad 即 \ u_1 \leqslant \bar{x} \leqslant v_1,$$

再以A作用之，得$u_2 \leqslant \bar{x} \leqslant v_2$，继续下去，有

$$u_n \leqslant \bar{x} \leqslant v_n,$$

令$n\to\infty$取极限，故有$x_* \leqslant \bar{x} \leqslant x^*$. #

定义 4.1.5 设E_1, E_2为Banach空间，$A: E_1 \to E_2$称为**闭算子**，当且仅当，对任取的$\{x_n\} \subset D(A)$满足条件：

(1) $x_n \to x (x \in E_1)$；

(2) $Ax_n \to y (y \in E_2)$，则$x \in D(A)$，且$y = Ax$.

定理 4.1.11 设P为拟正规锥，$A: \langle u_0, v_0\rangle \to E$为闭的增算子，且

$$u_0 \leqslant Au_0, \quad Av_0 \leqslant v_0,$$

而$u_n = Au_{n-1}$，$v_n = Av_{n-1} (n = 1, 2, \cdots)$. 若$\{u_n\}$，$\{v_n\}$均有聚点，设为$x_*$与$x^*$，则$A$在$\langle u_0, v_0\rangle$中有最小不动点$x_*$与最大不动点

x^*，且 $x_* = \lim_{n\to\infty} u_n, x^* = \lim_{n\to\infty} v_n$.

证 由定理 4.1.10 的证明知：

$$u_n \to x_*, \quad v_n \to x^* (n \to \infty).$$

由于 A 为闭算子，$\lim_{n\to\infty} Au_n = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = x_*$，故 $x_* = Ax_*$.

同理可证 $x^* = Ax^*$.

用与定理 4.1.10 相同的证法，可证得 x_*, x^* 分别为 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中的最小与最大不动点. #

系：设 P 为拟正规锥，$A:\langle u_0, v_0\rangle \to E$ 为连续增算子，且

$$u_0 \leqslant Au_0, \quad Av_0 \leqslant v_0,$$

又 $u_n = Au_{n-1}, v_n = Av_{n-1} (n = 1,2,\cdots)$，若 $\{u_n\}, \{v_n\}$ 均有收敛子列，则 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中有最大不动点 x^* 及最小不动点 x_*，且 $x^* = \lim_{n\to\infty} v_n, x_* = \lim_{n\to\infty} u_n$.

证 因为 $D(A) = \langle u_0, v_0\rangle$ 为闭集，A 连续，故 A 为闭算子，定理 4.1.11 的条件全部满足. 由定理 4.1.11 知，A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中有最大不动点 x^* 与最小不动点 x_*，且 $x_* = \lim_{n\to\infty} u_n, x^* = \lim_{n\to\infty} v_n$. #

定理 4.1.12 设 P 为拟正规锥，$A:\langle u_0, v_0\rangle \to E$ 为增算子，且

$$u_0 \leqslant Au_0, \quad Av_0 \leqslant v_0,$$

又 $u_n = Au_{n-1}, v_n = Av_{n-1} (n = 1,2,\cdots)$，若 $\{u_n\}$ 有收敛子列，且 $v_n - u_n \to 0 (n \to \infty)$，则 A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 中有惟一不动点 $x_* = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$.

证 设 $\{u_n\}$ 的收敛子列为 $\{u_{n_i}\}, u_{n_i} \to x_*$. 由引理 4.1.7 知 $u_n \to x_*$. 由于 $v_n - u_n \to 0$，从而 $v_n \to x_* (n \to \infty)$，易见

$$u_n \leqslant x_* \leqslant v_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

故

$$u_{n+1} \leqslant Ax_* \leqslant v_{n+1} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

因此 $x_* = Ax_*$. 据定理 4.1.10 可知，A 在 $\langle u_0, v_0\rangle$ 内的任一不动点 x 均满足：

$$u_n \leqslant x \leqslant v_n \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由于 $v_n - u_n \to 0(n \to \infty)$,故 $x = x_*$.因此 A 在$\langle u_0, v_0\rangle$ 中只有惟一不动点 x_*,且 $x_* = \lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. #

定理 4.1.13 设 E 为自反 Banach 空间,$A:\langle u_0, v_0\rangle \to E$ 为闭的增算子,且

$$u_0 \leqslant Au_0, \quad Av_0 \leqslant v_0,$$

则 A 在$\langle u_0, v_0\rangle$ 中有最大与最小不动点.若还有 $v_n - u_n \to 0(n \to \infty)$,其中 $u_n = Au_{n-1}, v_n = Av_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$,则 A 在$\langle u_0, v_0\rangle$ 中只有惟一不动点.

证 由于$\{u_n\} \subset \langle u_0, v_0\rangle$,$\{v_n\} \subset \langle u_0, v_0\rangle$,由引理 4.1.9 知,$\langle u_0, v_0\rangle$ 为有界集合,故$\{u_n\}$,$\{v_n\}$ 均有弱收敛子列,设为$\{u_{n_i}\}$,$\{v_{n_i}\}$,且 $u_{n_i} \xrightarrow{\text{弱}} x_*$,$v_{n_i} \xrightarrow{\text{弱}} x^*$.由引理 4.1.8 知,$u_{n_i} \to x_*$,$v_{n_i} \to x^*$.由引理 4.1.7 知,$u_n \to x_*$,$v_n \to x^*(n \to \infty)$,故定理 4.1.11 的条件满足.由定理 4.1.11 可知,x_* 与 x^* 分别为 A 在$\langle u_0, v_0\rangle$ 中的最小与最大不动点.如有 $v_n - u_n \to 0(n \to \infty)$,则有 $x_* = x^*$,故 A 在$\langle u_0, v_0\rangle$ 中只有惟一不动点. #

§4.2 单调 u_0 - 弱凹算子方程

定义 4.2.1 作用在具锥 P 的 Banach 空间 E 上的算子 A 称做是 u_0 - **弱凹**的,若 $\exists\, \theta \neq u_0 \in P$,使得

(1) $\forall\, \theta \neq x \in P$,有 $\alpha u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta u_0(\alpha = \alpha(x) > 0, \beta = \beta(x) > 0)$;

(2) 对每个 $x \in P$,只要 $\alpha_1 u_0 \leqslant x \leqslant \beta_1 u_0(\alpha_1 = \alpha_1(x) > 0, \beta_1 = \beta_1(x) > 0)$,总有

$$A(tx) \geqslant tAx \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

注:从定义中的(1) 知,u_0 - 弱凹算子必为正算子,且在 u_0 - 弱凹算子定义中,并未要求 u_0 - 弱凹算子是连续的,或是增算子.因此,u_0 - 弱凹算子较增算子、连续算子更为一般.

例 4.2.1　取 Banach 空间 $E = R^1$,锥 $P = [0, +\infty)$, $u_0 = 1 \in P$. 对非负自变量有定义的正函数 $f(x)$,若在每个区间 $[0, x_0]$ 上, $f(x)$ 的图像没有位于过原点与点 $(x_0, f(x_0))$ 的直线下方的点时,易验证: $f(x)$ 是 R^1 中的 u_0 - 弱凹算子.

例 4.2.2　常算子 $Ax \equiv u_0$ 也是 u_0 - 弱凹算子.

定理 4.2.1　(**u_0 - 弱凹算子的性质**)

(1) 若算子 A 为 u_0 - 弱凹算子,则对 $\forall c > 0$,算子 cA 也为 u_0 - 弱凹算子;

(2) 若 u_0 - 弱凹算子 A 又为增算子,则算子 $A^n (n = 2, 3, \cdots)$ 也为 u_0 - 弱凹算子和增算子;

(3) 设 A、B 均为 u_0 - 弱凹算子,在其凹性的定义中,共有非零元 u_0,则算子 $A + B$ 为 u_0 - 弱凹算子.

证　(1) 由于 A 为 u_0 - 弱凹算子,故 $\exists \theta \neq u_0 \in P$,使对 $\forall \theta \neq x \in P$,有

$$\alpha u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta u_0 \quad (\alpha = \alpha(x) > 0, \beta = \beta(x) > 0),$$

于是有　① $c\alpha u_0 \leqslant cAx \leqslant c\beta u_0$　(因为 $c > 0$),

记 $\tilde{\alpha} = c\alpha = c\alpha(x) > 0$, $\tilde{\beta} = c\beta = c\beta(x) > 0$,则上式为

$$\tilde{\alpha}\, u_0 \leqslant (cA)x \leqslant \tilde{\beta}\, u_0.$$

② 对每个 $x \in P$,只要 $\alpha_1(x) u_0 \leqslant x \leqslant \beta_1(x) u_0$, $(\alpha_1(x), \beta_1(x) > 0)$ 总有

$$A(tx) \geqslant tAx \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

两边同乘以 $c > 0$ 得

$$cA(tx) \geqslant t(cA)x \quad t \in [0, 1],$$

由 ①、② 可知, cA 为 u_0 - 弱凹算子.

(2) 因 A 为增算子,故对正整数 $n \geqslant 2$, A^n 显然也为增算子.

① 由 A 为 u_0 - 弱凹算子可知, $\exists \theta \neq u_0 \in P$,对 $\forall \theta \neq x \in P$,有

$$\alpha u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta u_0$$

$$(\alpha = \alpha(x) > 0, \beta = \beta(x) > 0),$$

显然 $\alpha u_0 \in P$,且 $\alpha u_0 \neq \theta$,故 $\exists \alpha_1 = \alpha_1(x) > 0$,使

$$\alpha_1 u_0 \leqslant A(\alpha u_0).$$

类推可知,$\exists \alpha_{n-1} = \alpha_{n-1}(x) > 0$,使

$$\alpha_{n-1} u_0 \leqslant A^{n-1}(\alpha u_0),$$

同样也有 $\exists \beta_{n-1} = \beta_{n-1}(x) > 0$,使

$$A^{n-1}(\beta u_0) \leqslant \beta_{n-1} u_0.$$

由 A 的单增性,有:

$$\alpha_{n-1} u_0 \leqslant A^{n-1}(\alpha u_0) \leqslant A^n x \leqslant A^{n-1}(\beta u_0) \leqslant \beta_{n-1} u_0.$$

② 对每个 $x \in P$,只要

$$\tilde{\alpha}_1(x) u_0 \leqslant x \leqslant \tilde{\beta}_1(x) u_0 \quad \tilde{\alpha}_1(x), \tilde{\beta}_1(x) > 0,$$

类似地,只要

$$\tilde{\alpha}_2(x) u_0 \leqslant Ax \leqslant \tilde{\beta}_2(x) u_0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\tilde{\alpha}_n(x) u_0 \leqslant A^{n-1} x \leqslant \tilde{\beta}_n(x) u_0,$$

其中$\tilde{\alpha}_i(x), \tilde{\beta}_i(x) > 0 \quad (i = 2, \cdots, n)$,总有

$$\begin{aligned} A^n(tx) &= A^{n-1}[A(tx)] \geqslant A^{n-1}(tAx) = A^{n-2}[A(tAx)] \\ &\geqslant A^{n-2}[tA^2 x] \geqslant \cdots \geqslant tA^n x \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \end{aligned}$$

(由于 $A, A^2, \cdots, A^n$ 为增算子).

综合 ①、② 得 $A^n (n = 2, 3, \cdots)$ 为 u_0 - 弱凹算子.

(3) 因为 A, B 均为 u_0 - 弱凹算子,且有共同的非零元 u_0.

① $\forall \theta \neq x \in P$,有:

$$\alpha_1 u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta_1 u_0,$$

$$\alpha_2 u_0 \leqslant Bx \leqslant \beta_2 u_0,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ 均为与 x 有关的正数.将上两式相加,并记 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \beta = \beta_1 + \beta_2$(显然 α, β 均为与 x 有关的正数) 得

$$\alpha u_0 \leqslant (A + B)x \leqslant \beta u_0.$$

② 对每个 $x \in P$,只要$\tilde{\alpha}_1(x)u_0 \leqslant x \leqslant \tilde{\beta}_1(x)u_0$ $(\tilde{\alpha}_1(x),\tilde{\beta}_1(x)>0)$,总有

$$\left.\begin{array}{l} A(tx) \geqslant tAx, \\ B(tx) \geqslant tBx, \end{array}\right. \quad t \in [0,1],$$

故

$$\begin{aligned}(A+B)(tx) &= A(tx)+B(tx) \geqslant tAx + tBx \\ &= t(A+B)x \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).\end{aligned}$$

综上所述,$A+B$ 为u_0 - 弱凹算子. #

定义4.2.2 设E是实Banach空间,$D \subset E$,$\theta \in D$,$A:D \to E$,$A\theta = \theta$.若 $x_0 \in D$,满足 $x_0 \neq \theta$,$Ax_0 = \lambda x_0$,λ 是某实数,则称 λ 是 A 的**固有值**,x_0 是 A 的属于λ 的**固有元**.

注:当 A 为线性算子时,固有值、固有元实际就是特征值与特征向量.

众所周知,线性全连续算子的固有值至多可数个,而属于同一固有值的固有元(加上零元素)构成 E 的子空间,对于非线性全连续算子,一般来说,它的固有值构成一些区间,而属于同一固有值的固有元一般不构成子空间(有时一个固有值只对应一个固有元).

以下定理告诉我们,单调 u_0 - 弱凹算子方程 $Ax = \lambda x$ 相应于不同固有值 λ 的不同的正固有元x 总是可比较大小的.

定理 4.2.2 设 A 是具锥P 的 Banach 空间 E 中的u_0 - 弱凹算子,同时又是增算子. x_1、x_2 是算子方程 $Ax = \lambda x$ 的非零正解,且它们相应于不同的参数值 λ_1 和 λ_2:

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1, \quad Ax_2 = \lambda_2 x_2,$$

则当 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ 时,必定有:$x_1 \geqslant x_2$.

证 因 $x_1, x_2 \in P$,由于算子 A 为u_0 - 弱凹算子,据 u_0 - 弱凹算子的定义知:

$$\alpha_1 u_0 \leqslant Ax_1 \leqslant \beta_1 u_0,$$

$$\alpha_2 u_0 \leqslant Ax_2 \leqslant \beta_2 u_0,$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 均为正数,因此:

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1}Ax_1 \geqslant \frac{\alpha_1}{\lambda_1}u_0 \geqslant \frac{\alpha_1}{\lambda_1\beta_2}Ax_2 = \frac{\lambda_2\alpha_1}{\beta_2\lambda_1}x_2,$$

这里$\frac{\lambda_2\alpha_1}{\lambda_1\beta_2} > 0$,于是令 $t_0 = \sup\{t \mid x_1 \geqslant tx_2\}$,知 $0 < t_0 < +\infty$.下证 $t_0 \geqslant 1$.

事实上,若 $t_0 < 1$,则由 $x_1 \geqslant t_0x_2$ 及算子 A 的单增性得

$$Ax_1 \geqslant A(t_0x_2) \quad t_0 \in (0,1),$$

再由算子 A 的凹性知:

$$A(t_0x_2) \geqslant t_0Ax_2 = \lambda_2t_0x_2,$$

从而有

$$x_1 = \frac{1}{\lambda_1}Ax_1 \geqslant \frac{1}{\lambda_1}A(t_0x_2) \geqslant \frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_0x_2,$$

由于 $\lambda_2 > \lambda_1$ 及 $t_0 > 0$,故$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_0 > t_0$,这与 t_0 是最大值矛盾,因此 $t_0 \geqslant 1$.

由此即得 $x_1 \geqslant x_2$. #

在满足上述定理的条件下,我们来考察序区间$\langle x_2, x_1\rangle$.假定 $\lambda \in (\lambda_1,\lambda_2)(\lambda_1 > 0)$,可以证明算子 $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}A$ 映$\langle x_2, x_1\rangle$入自己.

事实上,

$$A_\lambda x_2 = \frac{1}{\lambda}Ax_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda}x_2 \geqslant x_2,$$

$$A_\lambda x_1 = \frac{1}{\lambda}Ax_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 \leqslant x_1.$$

另外,若 A 为增算子,则对任何 $\lambda \in (\lambda_1,\lambda_2)$,算子 A_λ 也为增算子.这样,我们在证明算子 A_λ 存在不动点时(或证明算子方程 $Ax = \lambda x$ 存在解时),可利用定理 4.1.2.而且,从定理 4.1.2 容易推出:

定理 4.2.3 设单增的 u_0 - 弱凹算子 A 的方程

$$Ax = \lambda x,$$

对于参数 λ_1,λ_2(其中 $0 < \lambda_1 < \lambda_2$) 具有非零正解 x_1 和 x_2.

若满足下列条件之一:

(1) 锥 P 正规,算子 A 全连续;

(2) 锥 P 正则,算子 A 连续.

则算子方程 $Ax = \lambda x$ 对所有 $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ 具有非零的正解.

§4.3 u_0 - 凹算子及其不动点定理

从定理4.2.2可以看到单增的 u_0 - 弱凹算子对应于不同固有值的固有元是可比较的这一重要性质.但对应于同一固有值,它可能有许多不同的固有元,换句话说,单增的 u_0 - 弱凹算子保证不了对应于一个固有值仅有一个固有元.

例4.2.1所定义的函数就是单增 u_0 - 弱凹的,但对某个固定的固有值 λ,可以有无穷多个固有元与之对应.

为使一个固有值只对应惟一一个固有元,自然需将凹的条件再加强一些,于是引进所谓的 u_0 - 凹算子的概念.以后,我们将证明单增的 u_0 - 凹算子的固有值所对应的固有元在一定条件下是惟一的.

定义 4.3.1 设 P 是实 Banach 空间 E 中某锥,算子 $A:P \to P$(此时算子 A 是正的,因为 $AP \subset P$),$u_0 > \theta$(即 $u_0 \in P, u_0 \neq \theta$),如果:

(1) 对于任何 $x > \theta$,都存在 $\alpha = \alpha(x) > 0, \beta = \beta(x) > 0$,使

$$\alpha u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta u_0.$$

(2) 对于任何满足 $\alpha_1 u_0 \leqslant x \leqslant \beta_1 u_0$ 的 $x \in P$(这里 $\alpha_1 = \alpha_1(x) > 0, \beta_1 = \beta_1(x) > 0$)以及 $0 < t < 1$,都有 $\eta = \eta(x, t) > 0$ 存在,使

$$A(tx) \geqslant (1 + \eta) tAx,$$

则称 A 是 u_0 - **凹算子**.

例 4.3.1 取实 Banach 空间 $E = R^1$,锥 $P = [0, +\infty)$,$u_0 = 1 \in P$.对非负自变量有定义的正函数 $f(x)$,若在每个区间$[0, x_0]$上,$f(x)$ 的图像均位于过原点和点$(x_0, f(x_0))$ 的直线上方,则 $f(x)$ 是 R^1 中的 u_0 - 凹算子.

证 (1) 若 $x_0 \in (0, +\infty)$,因 $f(x_0) > 0, u_0 = 1$,取

$$\alpha(x_0) = \beta(x_0) = f(x_0) > 0,$$

关系式

$$\alpha(x_0)u_0 = f(x_0) = \beta(x_0)u_0$$

自然成立.

(2) 只要 $x_0 \in (0, +\infty)$,取 $\alpha_1(x_0) = \beta_1(x_0) = x_0$,则 $x_0 u_0 = x_0 = x_0 u_0$,对每个 $t \in (0,1)$,有 $tx_0 \in (0, x_0)$. 因连接(0,0)与 $(x_0, f(x_0))$ 的直线方程是:$y = \dfrac{f(x_0)}{x_0}x$,由 $f(x)$ 的图像特点即得

$$f(tx_0) > \frac{f(x_0)}{x_0}tx_0,$$

取
$$0 < \eta(t, x_0) \leqslant \frac{f(tx_0) - \dfrac{f(x_0)}{x_0}tx_0}{tf(x_0)},$$

就有:
$$f(tx_0) \geqslant tf(x_0) + \eta tf(x_0) = (1 + \eta)tf(x_0). \quad \#$$

据此可知,前述的拟凹算子其实也是 R^1 中的 u_0 - 凹算子.

定理 4.3.1 (u_0 - **凹算子的性质**)

(1) 若 A 是 u_0 - 凹算子,则对 $\forall c > 0$, cA 也为 u_0 - 凹算子;

(2) 设 A 为 u_0 - 凹算子,B 为 u_0 - 弱凹算子,且在其凹性定义中共有非零元 u_0,则算子 $A + B$ 为 u_0 - 凹算子.

证 (1) 仿定理 4.2.1(1) 的证明容易得证.

(2)① 对 $\forall x > \theta$,都存在 $\alpha_1 = \alpha_1(x) > 0, \beta_1 = \beta_1(x) > 0, \alpha_2 = \alpha_2(x) > 0, \beta_2 = \beta_2(x) > 0$,使

$$\alpha_1 u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta_1 u_0,$$
$$\alpha_2 u_0 \leqslant Bx \leqslant \beta_2 u_0,$$

故
$$(\alpha_1 + \alpha_2)u_0 \leqslant (A + B)x \leqslant (\beta_1 + \beta_2)u_0,$$

记 $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2 > 0, \tilde{\beta} = \beta_1 + \beta_2 > 0$,故上式即为

$$\tilde{\alpha} u_0 \leqslant (A + B)x \leqslant \tilde{\beta} u_0.$$

② 对任何满足 $\tilde{\alpha}_1 u_0 \leqslant x \leqslant \tilde{\beta}_1 u_0$ 的 $x \in P(\tilde{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_1(x) > 0$, $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1(x) > 0)$ 以及 $t \in (0,1)$,都有 $\eta = \eta(x,t) > 0$,使得

$$(A + B)(tx) \geqslant (1 + \eta)tAx + tBx,$$

要使

$$(1 + \eta)tAx + tBx \geqslant (1 + \eta_1)t(A + B)x \quad (\eta_1 > 0),$$

只需

$$\eta Ax \geqslant \eta_1(Ax + Bx),$$

由于

$$Bx \leqslant \beta_2 u_0 \leqslant \frac{\beta_2}{\alpha_1}Ax,$$

从而若要

$$\eta Ax \geqslant \eta_1(1 + \frac{\beta_2}{\alpha_1})Ax \geqslant \eta_1(Ax + Bx),$$

只需 $0 < \eta_1 \leqslant \dfrac{\eta\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_2}$,特别可取 $\eta_1 = \dfrac{\eta\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_2}$,

故确实存在 $\eta_1 = \dfrac{\eta\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_2} > 0$,使

$$(A + B)(tx) \geqslant (1 + \eta_1)t(A + B)x,$$

所以,$A + B$ 为 u_0 - 凹算子. #

定理 4.3.2 设增算子 A 是 u_0 - 凹算子,则算子方程 $Ax = \lambda x$ 对不论怎样的正参数 λ 的值,在锥 P 中不含有两个不同的非零正解.

证 设对同一 $\lambda > 0$ 有 $x_1 > \theta, x_2 > \theta$,使

$$Ax_1 = \lambda x_1, \quad Ax_2 = \lambda x_2,$$

由算子 A 的 u_0 - 凹性定义中的(1) 知

$$x_1 = \frac{1}{\lambda}Ax_1 \geqslant \frac{1}{\lambda}\alpha_1 u_0 = \frac{1}{\lambda}\frac{\alpha_1}{\beta_2}\beta_2 u_0$$

$$\geqslant \frac{\alpha_1}{\lambda\beta_2}Ax_2 = \frac{\alpha_1}{\beta_2}x_2,$$

于是,令 $t_0 = \sup\{t \mid x_1 \geqslant tx_2\}$ 知:$0 < t_0 < +\infty$. 下证 $t_0 \geqslant 1$.

事实上,若 $t_0 < 1$,则由 $x_1 \geqslant t_0 x_2$ 及算子 A 的u_0 - 凹性(2) 可推出:

$$A(t_0 x_2) \geqslant (1+\eta) t_0 A x_2 \quad (\eta = \eta(x,t) > 0).$$

由算子 A 的单增性得

$$x_1 = \frac{1}{\lambda} A x_1 \geqslant \frac{1}{\lambda} A(t_0 x_2) \geqslant \frac{(1+\eta) t_0}{\lambda} A x_2 = (1+\eta) t_0 x_2,$$

而$(1+\eta) t_0 > t_0$,这与 t_0 是最大值矛盾,故 $t_0 \geqslant 1$,从而 $x_1 \geqslant x_2$.

同理可证:$x_2 \geqslant x_1$,故 $x_1 = x_2$. #

据此定理即知,设增算子 A 是u_0 - 凹算子,若算子 A 的方程$Ax = x$ 在锥P 中有非零解,则它是惟一的.由此即得

定理 4.3.3 设 A 是u_0 - 凹算子,而且是增算子,则 A 至多只有一个正的不动点.

定理 4.3.4 设增算子 A 是u_0 - 凹算子,若 A 具有正不动点 x^*,而锥 P 是正规的,那么必存在 $R > r > 0$,使

$$Ax \not\leqslant x \quad (x \in P, 0 < \| x \| < r \text{ 时}), \tag{4.3.1}$$

$$Ax \not\geqslant x \quad (x \in P, \| x \| > R \text{ 时}). \tag{4.3.2}$$

证 先证

$$x > \theta, Ax \leqslant x \Rightarrow x \geqslant x^*. \tag{4.3.3}$$

事实上,由 u_0 - 凹算子定义(1) 知

$$x \geqslant Ax \geqslant \alpha(x) u_0 = \frac{\alpha(x)}{\beta(x^*)} \cdot \beta(x^*) u_0 \geqslant \frac{\alpha(x)}{\beta(x^*)} A x^*$$

$$= \frac{\alpha(x)}{\beta(x^*)} \cdot x^*,$$

于是令 $t_0 = \sup\{t \mid x \geqslant t x^*\}$,知$0 < t_0 < +\infty$.下证 $t_0 \geqslant 1$.若不然 $t_0 < 1$,则由 u_0 - 凹算子定义(2) 知,$\exists\, \eta_0 > 0$,使

$$x \geqslant Ax \geqslant A(t_0 x^*) \geqslant (1+\eta_0) t_0 A x^* = (1+\eta_0) t_0 x^*,$$

这显然与 t_0 的定义矛盾,于是 $t_0 \geqslant 1$,故 $x \geqslant x^*$,从而(4.3.3) 式成立.

同理可证:

$$x > \theta, Ax \geqslant x \Rightarrow x \leqslant x^*. \tag{4.3.4}$$

令 $r = \inf\limits_{z \in P} \| z + x^* \|$,则 $r > 0$(因若 $r = 0$,则 $\exists z_n \in P$,使 $\| z_n + x^* \| \to 0$,从而 $z_n \to -x^* \in P$,这与 $x^* > \theta$ 矛盾).于是如此规定的 r 满足(4.3.1)式.

事实上,当 $x \in P, 0 < \| x \| < r$ 时,必有 $x \not\geqslant x^*$(因若 $x \geqslant x^*$,则 $x = z + x^*, z = x - x^* \geqslant \theta$,从而 $\| x \| = \| z + x^* \| \geqslant r$),于是由上述 $x > \theta, Ax \leqslant x \Rightarrow x \geqslant x^*$ 式知 $Ax \not\leqslant x$.

由于锥 P 是正规的,故序区间 $\langle \theta, x^* \rangle$ 有界.令 $R = \sup\limits_{\theta \leqslant z \leqslant x^*} \| z \|$,则此 R 即满足(4.3.2)式.事实上,当 $x \in P, \| x \| > R$ 时,必有 $x \not\leqslant x^*$,故由(4.3.4)式即知 $Ax \not\geqslant x$. #

注:条件(4.3.1)式与(4.3.2)式即所谓的“锥压缩”.利用不动点指数理论可以证明:若算子 A 还是全连续的,那么条件(4.3.1)式与(4.3.2)式就保证了 A 具有正不动点.因此,增的全连续 u_0 - 凹算子具有(惟一)不动点的充分必要条件是它是锥压缩的.

定理 4.3.5 设增算子 A 为 u_0 - 凹算子,且锥 P 为正规锥,又若算子方程 $Ax = x$ 在锥 P 中有非零解 x^*,则迭代列 $x_n = Ax_{n-1}$ 对任何非零初值 $x_0 \in P$ 依范数收敛到方程 $Ax = x$ 的非零解 x^*.

证 任取 $0 < t_1 < 1$,令

$$v_0 = t_1 x^*, \quad v_{n+1} = Av_n \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

显然

$$t_1 x^* = v_0 \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant x^*.$$

令 $\rho_n = \sup\{t \mid tx^* \leqslant v_n\}$,很明显

$$0 < t_1 = \rho_0 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \cdots \leqslant \rho_n \leqslant \cdots \leqslant 1, \tag{4.3.5}$$

又

$$\rho_n x^* \leqslant v_n \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

我们来证明

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n = 1.$$

若不然，则$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = r < 1(r \geqslant t_1 > 0)$，于是由 A 的u_0 - 凹性知，∃ $\eta > 0$，使

$$A(rx^*) \geqslant (1+\eta)rAx^* = (1+\eta)rx^*,$$

从而当 $0 < t \leqslant r$ 时，有

$$A(tx^*) = A(\frac{t}{r}rx^*) \geqslant \frac{t}{r}A(rx^*) \geqslant (1+\eta)tx^*,$$

特别地，有

$$A(\rho_n x^*) \geqslant (1+\eta)\rho_n x^* \quad (n = 0,1,2\cdots),$$

由 $\rho_n x^* \leqslant v_n$ 及 A 为增算子知：

$$v_{n+1} = Av_n \geqslant A(\rho_n x^*) \geqslant (1+\eta)\rho_n x^*,$$

由此可知

$$\rho_{n+1} \geqslant (1+\eta)\rho_n \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

从而

$$\rho_n \geqslant (1+\eta)^n \rho_0 \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

这显然与(4.3.5)式矛盾，故$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = 1$.

现任取 $t_2 > 1$，令

$$w_0 = t_2 x^*, \quad w_{n+1} = Aw_n \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

显然

$$t_2 x^* = w_0 \geqslant w_1 \geqslant w_2 \geqslant \cdots \geqslant w_n \geqslant \cdots \geqslant x^*.$$

令 $\xi_n = \inf\{t \mid tx^* \geqslant w_n\}$，很明显

$$t_2 = \xi_0 \geqslant \xi_1 \geqslant \xi_2 \geqslant \cdots \geqslant \xi_n \geqslant \cdots \geqslant 1, \tag{4.3.6}$$

$$\xi_n x^* \geqslant w_n \quad (n = 0,1,2,\cdots).$$

我们来证明

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n = 1.$$

若不然，设$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_0 = r_0 > 1$，由 A 的u_0 - 凹性知，∃ $\eta_0 > 0$，使

$$Ax^* = A(\frac{1}{r_0}\cdot r_0 x^*) \geqslant \frac{1+\eta_0}{r_0}A(r_0 x^*),$$

即 $$A(r_0x^*)\leqslant\frac{r_0}{1+\eta_0}Ax^*=\frac{r_0x^*}{1+\eta_0},$$
由此可知,当 $t\geqslant r_0$ 时

$$A(r_0x^*)=A(\frac{r_0}{t}\cdot tx^*)\geqslant\frac{r_0}{t}A(tx^*),$$

从而

$$A(tx^*)\leqslant\frac{t}{r_0}A(r_0x^*)\leqslant\frac{tx^*}{1+\eta_0},$$

特别有

$$A(\xi_nx^*)\leqslant\frac{\xi_nx^*}{1+\eta_0}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

再注意到不等式:$\xi_nx^*\geqslant w_n$,得

$$w_{n+1}=Aw_n\leqslant A(\xi_nx^*)\leqslant\frac{\xi_nx^*}{1+\eta_0}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

从而

$$\xi_{n+1}\leqslant\frac{\xi_n}{1+\eta_0}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

由此得

$$\xi_n\leqslant\frac{\xi_0}{(1+\eta_0)^n}\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

这显然与(4.3.6)式矛盾,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=1$.

现有 $x_0>\theta$,作迭代序列 $x_{n+1}=Ax_n(n=0,1,2,\cdots)$,由 u_0-凹算子定义(1)知:

$$\alpha_0u_0\leqslant x^*=Ax^*\leqslant\beta_0u_0,\tag{4.3.7}$$
$$\alpha_1u_0\leqslant x_1=Ax_0\leqslant\beta_1u_0,$$

其中 $\alpha_0>0,\beta_0>0,\alpha_1>0,\beta_1>0$,由此知

$$\frac{\alpha_1}{\beta_0}x^*\leqslant x_1\leqslant\frac{\beta_1}{\alpha_0}x^*.$$

今取 $0<t_1<\min\{1,\frac{\alpha_1}{\beta_0}\},t_2>\max\{1,\frac{\beta_1}{\alpha_0}\}$,则

$$0 < t_1 < 1, t_2 > 1, v_0 = t_1 x^* \leqslant x_1 \leqslant t_2 x^* = w_0,$$

由此,根据 A 的单增性得(注意到 $\rho_n x^* \leqslant v_n$ 与 $\xi_n x^* \geqslant w_n$):

$$\rho_n x^* \leqslant v_n \leqslant x_{n+1} \leqslant w_n \leqslant \xi_n x^* \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

再根据(4.3.7) 式知(注意到(4.3.5) 式与(4.3.6) 式)

$$\begin{aligned}(\rho_n - 1)\beta_0 u_0 &\leqslant (\rho_n - 1)x^* \leqslant x_{n+1} - x^* \\ &\leqslant (\xi_n - 1)x^* \leqslant (\xi_n - 1)\beta_0 u_0 \\ &(n = 0,1,2,\cdots),\end{aligned}$$

由此,注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n = 1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = 1$ 即得

$$\| x_n - x^* \|_{u_0} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

又由于锥 P 是正规的,故据定理 3.3.1(3°) 立即可得

$$\| x_n - x^* \| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

因此,迭代列 $x_n = Ax_{n-1}$ 对任何非零初值 $x_0 \in P$(即 $x_0 > \theta$) 依范数收敛到方程 $Ax = x$ 的非零解 x_0^* #

§4.4 对非线性积分方程的应用

P. J. Bushell 利用 Hilbert 投影距离法,得到了如下定理(见文献[30]):

定理:设 P 是实 Banach 空间 E 中的一个体锥,若范数关于 P 是单调的(即 $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \| x \| \leqslant \| y \|$), $A: P^\circ \to P^\circ$ 是正 α 齐次的, $0 < |\alpha| < 1$(即 $A(\lambda x) = \lambda^\alpha Ax, \forall x \in P^\circ, \lambda > 0$),并且 A 是增的(若 $0 < \alpha < 1$) 或减的(若 $-1 < \alpha < 0$),则 A 在 P° 中必具有惟一的正不动点 x^*.

将此定理应用于下面的非线性积分方程:

$$\varphi(x) = \int_G k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y \tag{4.3.8}$$

其中 G 为 R^N 中某有界闭域,即得下面的结论:

结论:设 $0 < |\alpha| < 1$, $k(x,y)$ 在 $G \times G$ 上非负连续,且 $\int_G k(x,$

$y)\mathrm{d}y > 0, \forall x \in G$,则积分方程(4.3.8)在 G 上具有惟一的恒正的连续解.

我们则让 $\alpha \in (-1,0)$,对核 $k(x,y)$ 的假定加强为:$k(x,y) > 0, \forall (x,y) \in G \times G$,用 u_0 - 凹算子的有关理论来讨论非线性积分算子

$$A\varphi = \int_G k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y \tag{4.3.9}$$

的幂算子 A^2 的正不动点的存在性与惟一性.

在讨论非线性积分算子 A((4.3.9)式)的幂算子 A^2 的正不动点的存在性与惟一性之前,先来考察算子 A 本身的 u_0 - 凹性. 为此先引入定义:

定义 4.4.1 设 P 是实 Banach 空间 E 中某体锥,$A: P \to P$,若对任何 $x > \theta$ 及 $0 < t < 1$,均有

$$A(tx) \gg tAx,$$

则称 A 是**强次线性的**.

定理 4.4.1 设 P 是实 Banach 空间 E 中某体锥,$u_0 \in P^\circ$,若 A 是强次线性的,则 A 必为 u_0 - 凹算子.

证 设 A 是强次线性算子,对 $x > \theta$,由式

$$A(tx) \gg tAx$$

得
$$Ax = A(\frac{1}{2} \cdot 2x) \geqslant \frac{1}{2} A(2x) \geqslant \theta.$$

因此 $Ax \in P^\circ$,于是 $\exists \alpha > 0$(充分小),使 $Ax - \alpha u_0 \in P$,即 $Ax \geqslant \alpha u_0$. 另外,因 $u_0 \in P^\circ$,故 $\exists \beta > 0$(充分大),使 $u_0 - \frac{1}{\beta} Ax \in P$,从而 $Ax \leqslant \beta u_0$,于是有

$$\alpha u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta u_0.$$

$\forall x > \theta$ 及 $0 < t < 1$,由 $A(tx) \gg tAx$ 知

$$A(tx) - tAx \in P^\circ,$$

于是 $\exists \eta = \eta(x,t) > 0$(充分小),使

$$A(tx) - tAx - \eta tAx \in P,$$

即 $$A(tx) \geqslant (1+\eta)tAx,$$
因此 A 是 u_0 - 凹算子. #

例 4.4.1 考察非线性积分算子

$$A\varphi(x) = \int_G k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y,$$

其中 G 表示 N 维欧氏空间 R^N 中某有界闭域,$k(x,y)$ 在 $G \times G$ 上恒正、连续,$\alpha \in (0,1)$. 令锥

$$P_1 = \{\varphi \mid \varphi \in C(G), \varphi(x) \geqslant 0\},$$

显然,$A: P_1 \to P_1$ 全连续.

因为 $0 < \alpha < 1$,则当 $\varphi > \theta, 0 < t < 1$ 时,

$$\begin{aligned} A[t\varphi(x)] - tA[\varphi(x)] &= (t^\alpha - t)\int_0^1 k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y \\ &\geqslant m(t^\alpha - t)\int_0^1 [\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y \\ &= \beta > 0, \end{aligned}$$

其中 $m = \min\limits_{x,y \in G} k(x,y) > 0$,故

$$A(t\varphi) - tA\varphi \in P_1^\circ,$$

即 $$A(t\varphi) \gg tA\varphi,$$

故 A 是强次线性的,据定理 4.3.6 知 A 是 u_0 - 凹算子.

例 4.4.2 考察非线性积分算子 A((4.3.9) 式) 的幂算子 A^2 的 u_0 - 凹性. 为此取锥

$$P = \{\varphi \mid \varphi \in C(G), \varphi(x) \geqslant \frac{m}{2M}\max_{x \in G} |\varphi(x)| = \frac{m}{2M}\|\varphi\|,$$

其中 $0 < m \leqslant M$,使 $m \leqslant k(x,y) \leqslant M, (x,y) \in G \times G\}$,

取 $u_0(x) \equiv 1$,再引入另外一个锥

$$\widetilde{P} = \{\varphi \mid \varphi \in C(G), \varphi(x) \geqslant \frac{m}{M}\max_{x \in G} |\varphi(x)|\},$$

显然 P 与 $\widetilde{P}$ 中的元素均为非负连续函数,且 $P \supset \widetilde{P}$.

命题 1 算子 A 映锥 P 中的非零元为 $\widetilde{P}$ 中的非零元.

证 只需证算子 A 映正连续函数为锥 $\widetilde{P}$ 中的函数(因锥 P 中的

非零元,自然是 $C(G)$ 中的正连续函数).

设 $\varphi(x)$ 是正连续函数,即 $\varphi(x)\in P$,由于二元函数 $k(x,y)$ 在有界闭域 $G\times G$ 上恒正连续,故它在 $G\times G$ 上有上、下界,即

$$0<m\leqslant k(x,y)\leqslant M,$$

由上式可得

$$0<m\int_G[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y\leqslant\int_G k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y$$
$$\leqslant M\int_G[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y,$$

故

$$A\varphi(x)=\int_G k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y\geqslant m\int_G[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y>0,$$

$$\max_{x\in G}A\varphi(x)=\max_{x\in G}\int_G k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y\leqslant M\int_G[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y,$$

于是

$$A\varphi(x)\geqslant\frac{m}{M}\max_{x\in G}A\varphi(x)=\frac{m}{M}\max_{x\in G}|A\varphi(x)|,$$

即
$$A\varphi(x)\in\widetilde{P},\text{且 }A\varphi(x)\neq\theta.$$

故算子 A 映锥 P 中的非零元为锥 $\widetilde{P}$ 中的非零元. #

命题 2 在锥 P 引入的序关系下,对锥 $\widetilde{P}$ 中的每个非零元素 $w(x)$,存在 $\alpha,\beta>0$,使

$$\alpha u_0\overset{(P)}{\leqslant}w(x)\overset{(P)}{\leqslant}\beta u_0.$$

证 设 $w(x)\in\widetilde{P}$,且 $w(x)\neq\theta$,此时 $w(x)\overset{(P)}{>}\theta$,要使在锥 P 引入的序关系下

$$w(x)\overset{(P)}{\leqslant}\beta u_0,$$

必须

$$\beta u_0-w(x)\in P,$$

即

$$\beta u_0-w(x)\geqslant\frac{m}{2M}\max_{x\in G}|\beta u_0-w(x)|.$$

注意到 P 中的元素均为非负连续函数及 $u_0(x)\equiv 1$,有:

$$\begin{aligned}\beta u_0 - w(x) &\geqslant \frac{m}{2M}\max_{x\in G}|\beta u_0 - w(x)| \\ &= \frac{m}{2M}\max_{x\in G}[\beta - w(x)] \\ &= \frac{m}{2M}\beta + \frac{m}{2M}\cdot\max_{x\in G}[-w(x)] \\ &= \frac{m}{2M}\beta - \frac{m}{2M}\cdot\min_{x\in G} w(x).\end{aligned}$$

因 $w(x)\leqslant \max\limits_{x\in G} w(x)$,故只需

$$\beta - \max_{x\in G} w(x) \geqslant \frac{m}{2M}\beta - \frac{m}{2M}\min_{x\in G} w(x),$$

从而

$$\beta \geqslant \frac{2M}{2M-m}\left[\max_{x\in G} w(x) - \frac{m}{2M}\min_{x\in G} w(x)\right] > 0.$$

同样,为使 $w(x) - \alpha u_0 \in P$,即

$$\begin{aligned}w(x) - \alpha u_0 &\geqslant \frac{m}{2M}\max_{x\in G}|w(x) - \alpha u_0| \\ &= \frac{m}{2M}\max_{x\in G}[w(x) - \alpha] \\ &= \frac{m}{2M}\max_{x\in G} w(x) - \frac{m}{2M}\alpha,\end{aligned}$$

因 $w(x)\in \widetilde{P}$,即

$$w(x) \geqslant \frac{m}{M}\max_{x\in G}|w(x)| = \frac{m}{M}\max_{x\in G} w(x),$$

故只需

$$\frac{m}{M}\max_{x\in G} w(x) - \alpha \geqslant \frac{m}{2M}\max_{x\in G} w(x) - \frac{m}{2M}\alpha,$$

解之得

$$0 < \alpha \leqslant \frac{m}{2M-m}\cdot\max_{x\in G} w(x),$$

因此,存在 $0 < \alpha \leqslant \dfrac{m}{2M-m}\cdot\max\limits_{x\in G} w(x)$,

$$\beta \geqslant \frac{2M}{2M-m}[\max_{x\in G} w(x) - \frac{m}{2M}\min_{x\in G} w(x)] > 0,$$

使不等式

$$\alpha u_0 \overset{(P)}{\leqslant} w(x) \overset{(P)}{\leqslant} \beta u_0$$

在锥 P 意义下成立. #

结论 Ⅰ:非线性积分算子

$$A\varphi(x) = \int_G k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y$$

(其中 $\alpha \in (-1,0)$,G 为R^N 中有界闭域,$k(x,y)$ 在 $G\times G$ 上恒正连续)的幂算子 A^2 在锥

$$P = \{\varphi \mid \varphi \in C(G), \varphi(x) \geqslant \frac{m}{2M}\max_{x\in G}|\varphi(x)|,$$

其中 $0 < m < M$,使 $m \leqslant k(x,y) \leqslant M$,$(x,y) \in G\times G\}$

上是 u_0 - 凹算子,这里 $u_0(x) \equiv 1$.

证 只需验证算子 A^2 在锥 P 上满足u_0 - 凹算子定义中的两个条件.

(1) 由命题1知,对 $\forall\, \theta < \varphi(x) \in P$,均有 $\theta < A\varphi(x) \in \tilde{P} \subset P$,从而有

$$A^2\varphi(x) \in \tilde{P} \subset P, \text{且 } A^2\varphi(x) \neq \theta,$$

再由命题2即知,存在 $\alpha[\varphi(x)]$,$\beta[\varphi(x)] > 0$,使在锥 P 意义下有:

$$\alpha u_0 \overset{(P)}{\leqslant} A^2\varphi(x) \overset{(P)}{\leqslant} \beta u_0.$$

(2) 当$0 < t < 1$时,有:

$$A[t\varphi(x)] = \int_G k(x,y)[t\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y = t^2 A\varphi(x),$$

从而

$$A^2[t\varphi(x)] = A[t^\alpha A\varphi(x)]$$
$$= (t^\alpha)^\alpha A^2\varphi(x) = t^{\alpha^2}\cdot A^2\varphi(x),$$

因 $\alpha \in (-1,0)$,故 $t^{\alpha^2-1} - 1 > 0$,因此可取

$$0 < \eta \leqslant t^{\alpha^2-1} - 1,$$

于是

$$A^2[t\varphi(x)] = t^{\alpha^2} A^2\varphi(x) \geqslant (1+\eta)tA^2\varphi(x),$$

综上所述,A^2 是锥 P 上的 u_0 - 凹算子. #

在证得非线性积分算子

$$A\varphi(x) = \int_G k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y$$

的幂算子 A^2 为锥 P 上的 u_0 - 凹算子之后,再来考察幂算子 A^2 的正不动点的存在性与惟一性.

命题 3 锥 P 是完全正则锥.

证 作锥 P 的任一按序单调且按连续函数空间 $C(G)$ 中的范数有界的序列 $\{\varphi_n(x)\}(x \in G, n = 1,2,\cdots)$.

对于任意固定的 $x_0 \in G$, $\{\varphi_n(x_0)\}$ 显然是有界数列.

因为

$$\varphi_{n+1}(x_0) - \varphi_n(x_0) \geqslant \frac{m}{2M}\| \varphi_{n+1} - \varphi_n \| \geqslant 0,$$

所以

$$\varphi_n(x_0) \leqslant \varphi_{n+1}(x_0), n = 1,2,\cdots$$

故 $\{\varphi_n(x_0)\}$ 为单增有界数列,从而收敛. 据数列的 Cauchy 收敛准则知:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N$,当 $k, l > N$ 时,有

$$|\varphi_{k(x_0)} - \varphi_{l(x_0)}| < \frac{m}{2M}\varepsilon.$$

因为

$$\varphi_{k(x_0)} - \varphi_{l(x_0)} \geqslant \frac{m}{2M}\| \varphi_k - \varphi_l \|,$$

所以

$$\| \varphi_k - \varphi_l \| \leqslant \frac{2M}{m}[\varphi_{k(x_0)} - \varphi_{l(x_0)}]$$

$$< \frac{2M}{m} \cdot \frac{m}{2M}\varepsilon = \varepsilon,$$

因此$\{\varphi_n(x)\}$为 $C(G)$ 中的基本列.

又因为连续函数空间 $C(G)$ 按范数 $\|\varphi\| = \max_{x\in G}|\varphi(x)|$ 为 Banach 空间,故 $\exists\, \varphi_0(x) \in C(G)$,使

$$\|\varphi_n(x) - \varphi_0(x)\|_{C(G)} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即序列$\{\varphi_{n(x)}\}$按 $C(G)$ 中的范数收敛,所以锥 P 是完全正则锥. #

命题 4 按锥 P 所引入的序关系,幂算子 A^2 是增算子.

证 设在锥 P 意义下:

$$\varphi(x) \overset{(P)}{\leqslant} \psi(x),$$

只需证明 $A\varphi(x) \overset{(P)}{\geqslant} A\psi(x)$,从而必有

$$A^2\varphi(x) \overset{(P)}{\leqslant} A^2\psi(x).$$

因为

$$\varphi(x) \overset{(P)}{\leqslant} \psi(x),$$

即

$$\psi(x) - \varphi(x) \in P,$$

故

$$\psi(x) - \varphi(x) \geqslant \frac{m}{2M}\|\psi - \varphi\| \geqslant 0,$$

所以 $\forall\, x \in G$,均有 $\varphi(x) \leqslant \psi(x)$.

又因为

$$\alpha \in (-1,0),$$

所以

$$\varphi^\alpha(x) \geqslant \psi^\alpha(x).$$

又因二元函数 $k(x,y)$ 在有界闭域 $G \times G$ 上恒正连续,故它在 $G \times G$ 上有上、下界,即

$$0 < m \leqslant k(x,y) \leqslant M,$$

于是有：

$$\begin{aligned}0 &< m\int_G[\varphi^\alpha(y)-\psi^\alpha(y)]\mathrm{d}y\\&\leqslant\int_G k(x,y)[\varphi^\alpha(y)-\psi^\alpha(y)]\mathrm{d}y\\&\leqslant M\int_G[\varphi^\alpha(y)-\psi^\alpha(y)]\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned}0 &< m\int_G[\varphi^\alpha(y)-\psi^\alpha(y)]\mathrm{d}y\\&\leqslant A\varphi(x)-A\psi(x)\\&\leqslant M\int_G[\varphi^\alpha(y)-\psi^\alpha(y)]\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

故由上述第二个不等式得

$$\begin{aligned}\max_{x\in G}[A\varphi(x)-A\psi(x)] &= \max_{x\in G}\int_G k(x,y)[\varphi^\alpha(y)-\psi^\alpha(y)]\mathrm{d}y\\&\leqslant M\int_G[\varphi^\alpha(y)-\psi^\alpha(y)]\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

从而

$$\int_G[\varphi^\alpha(y)-\psi^\alpha(y)]\mathrm{d}y \geqslant \frac{1}{M}\max_{x\in G}[A\varphi(x)-A\psi(x)],$$

再由上面第一个不等式得

$$\begin{aligned}A\varphi(x)-A\psi(x) &\geqslant m\int_G[\varphi^\alpha(y)-\psi^\alpha(y)]\mathrm{d}y\\&\geqslant \frac{m}{M}\max_{x\in G}[A\varphi(x)-A\psi(x)]\\&> \frac{m}{2M}\max_{x\in G}[A\varphi(x)-A\psi(x)]\\&= \frac{m}{2M}\max_{x\in G}|A\varphi(x)-A\psi(x)|,\end{aligned}$$

所以

$$A\varphi(x)-A\psi(x)\in P,$$

故在锥 P 所引入的序关系下

$$A\varphi(x) \overset{(P)}{\geqslant} A\psi(x),$$

从而

$$A^2\varphi(x) \overset{(P)}{\leqslant} A^2\psi(x),$$

因此幂算子 A^2 是锥 P 上的增算子. #

接下来考察幂算子 A^2 在序区间上的自映照性.

命题 5 在锥 P 所引入的序关系下,幂算子 A^2 映序区间$\langle bu_0, \frac{1}{b}u_0\rangle$ 入自己.其中 b 满足:

$$b^{1-\alpha^2} \leqslant \min\{\alpha_0, \frac{1}{\beta_0}\},$$

α_0,β_0 是使式

$$\alpha_0 u_0 \overset{(P)}{\leqslant} A^2 u_0 \overset{(P)}{\leqslant} \beta_0 u_0$$

成立的正数,这里 $u_0(x) \equiv 1$.

证明 因为 $A^2: P \to P$,所以对 $u_0(x) \equiv 1 \in P$,有 $A^2 u_0 \in P$.

又据结论 Ⅰ 知,A^2 是 P 上的 u_0 - 凹算子,故 $\exists\, \alpha_0,\beta_0 > 0$,使

$$\alpha_0 u_0 \overset{(P)}{\leqslant} A^2 u_0 \overset{(P)}{\leqslant} \beta_0 u_0,$$

因为

$$\begin{aligned} A[bu_0(x)] &= \int_G k(x,y)[bu_0(y)]^\alpha \mathrm{d}y \\ &= b^\alpha \int_G k(x,y)[u_0(y)]^\alpha \mathrm{d}y \\ &= b^\alpha A u_0(x), \end{aligned}$$

所以

$$A^2[bu_0] = b^{\alpha^2} A^2 u_0 \overset{(P)}{\geqslant} b^{\alpha^2} \alpha_0 u_0 \geqslant b^{\alpha^2} b^{1-\alpha^2} u_0 = bu_0,$$

$$A^2[\frac{1}{b}u_0] = \frac{1}{b^{\alpha^2}} A^2 u_0 \overset{(P)}{\leqslant} \frac{1}{b^{\alpha^2}} \beta_0 u_0 \leqslant \frac{1}{b^{\alpha^2}} \cdot b^{\alpha^2-1} u_0 = \frac{1}{b} u_0,$$

于是

$$A^2[bu_0] \overset{(P)}{\geqslant} bu_0, \quad A^2[\frac{1}{b}u_0] \overset{(P)}{\leqslant} \frac{1}{b}u_0,$$

即在锥 P 中：

$$A^2:[bu_0, \frac{1}{b}u_0] \to [bu_0, \frac{1}{b}u_0]. \quad \#$$

结论 Ⅱ：在具锥 P 的实 Banach 空间 $C(G)$ 上，非线性积分算子

$$A\varphi(x) = \int_G k(x,y)[\varphi(y)]^\alpha \mathrm{d}y$$

（其中 $\alpha \in (-1,0)$，G 为 R^N 中有界闭域，$k_{(x,y)}$ 在 $G \times G$ 上恒正连续）的幂算子 A^2 在序区间 $\langle bu_0, \frac{1}{b}u_0 \rangle$ 中必有惟一的正不动点 φ^*，且以任何 $\varphi_0 \in \langle bu_0, \frac{1}{b}u_0 \rangle$ 为初值，作迭代：

$$\varphi_n = A^2\varphi_{n-1} \quad (n = 1,2,\cdots),$$

都有

$$\| \varphi_n - \varphi^* \|_{C(G)} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

证 显然，$C(G) \supset P \supset \langle bu_0, \frac{1}{b}u_0 \rangle$，故

$$A^2: \langle bu_0, \frac{1}{b}u_0 \rangle \to C(G).$$

据例 4.3.2 知，A 是全连续算子，从而 A^2 必为连续算子．由命题 3 知，锥 P 是完全正则锥，从而 P 也是正则锥．又由命题 4 知，A^2 为增算子，再据命题 5 知：

$$A^2(bu_0) \overset{(P)}{\geqslant} bu_0, \quad A^2(\frac{1}{b}u_0) \overset{(P)}{\leqslant} \frac{1}{b}u_0,$$

满足定理 4.1.2 中的条件，故 A^2 在 $< bu_0, \frac{1}{b}u_0 >$ 中至少有一个不动点．

又据结论 Ⅰ 知，A^2 是 u_0 - 凹算子，据定理 4.3.3 知，A^2 至多只有一个正的不动点．

因此，A^2 在序区间 $\langle bu_0, \frac{1}{b}u_0 \rangle$ 中有惟一的正不动点 φ^*．

再由定理4.1.2的系知，对任何初值 $\varphi_0 \in \langle bu_0, \frac{1}{b}u_0\rangle$ 作迭代列 $\varphi_n = A^2\varphi_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$，都有

$$\|\varphi_n - \varphi^*\|_{C(G)} \to 0 \quad (n \to \infty). \quad \#$$

§4.5 对二阶常微分方程的应用

设 E 是具锥 P 的 Banach 空间，$I = [0,1]$，令

$$C[I,E] = \{u(t): I \to E \mid u(t) \text{ 连续}\},$$

$$C^2[I,E] = \{u(t): I \to E \mid u(t) \text{ 为二阶连续可微}\},$$

对 $u = u(t) \in C[I,E]$，令 $\|u\|_C = \max\limits_{t\in I}\|u(t)\|$，其中 $\|\cdot\|$ 是 E 中的范数，则易知 $C[I,E]$ 在范数 $\|\cdot\|_C$ 下为 - Banach 空间.

设 $f: I \times E \to E$ 连续，考察 Banach 空间中二阶常微分方程两点边值问题：

$$\begin{cases} -u'' = f(t,u), f \in C[I \times E, E], \\ u(0) = u(1) = \theta. \end{cases} \tag{4.5.1}$$

假设：

(1) $\exists\, v_0, w_0 \in C^2[I,E]$，使 $v_0(t) \leqslant w_0(t)(\forall\, t \in I)$，并且 v_0 和 w_0 分别是(4.5.1)式的下解和上解，即

$$-v_0'' \leqslant f(t,v_0), \quad v_0(0) \geqslant v_0(1) = \theta, \tag{4.5.2}$$

$$-w_0'' \geqslant f(t,w_0), \quad w_0(0) \geqslant w_0(1) = \theta. \tag{4.5.3}$$

(2) 存在常数 $M > 0$，使对任给

$$v, u \in \langle v_0, w_0\rangle = \{u \in C[I,E] \,|\, v_0 \leqslant u \leqslant w_0\}, v \leqslant u,$$

都有

$$f(t,u) - f(t,v) \geqslant -M(u - v).$$

例 4.5.1 设 E 是弱序列完备的 Banach 空间，P 是 E 中的正规锥. 又设满足假设(1)(2)，则两点边值问题(4.5.1)式在 $\langle v_0, w_0\rangle$ 中

必定有解. 若分别以 v_0 和 w_0 为初始元素,作(隐式) 迭代序列:

$$\begin{aligned}v_n(t) = {}& t\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r f(s, v_{n-1}(s))\mathrm{d}s - Mt\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r (v_n(s) \\ & - v_{n-1}(s))\mathrm{d}s + M\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r (v_n(s) - v_{n-1}(s))\mathrm{d}s \\ & - \int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r f(s, v_{n-1}(s))\mathrm{d}s, \\ w_n(t) = {}& t\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r f(s, w_{n-1}(s))\mathrm{d}s - Mt\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r (w_n(s) \\ & - w_{n-1}(s))\mathrm{d}s + M\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r (w_n(s) - w_{n-1}(s))\mathrm{d}s \\ & - \int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r f(s, w_{n-1}(s))\mathrm{d}s \quad (n = 1,2,\cdots),\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

则 $\{v_n(t)\}$ 和 $\{w_n(t)\}$ 分别在 I 上依 E 中的范数一致收敛于两点边值问题(4.5.1) 式在 $\langle v_0, w_0\rangle$ 中的最小解与最大解.

证 $\forall h \in \langle v_0, w_0\rangle$,考虑 Banach 空间二阶线性常微分方程两点边值问题:

$$\begin{cases} -u''(t) = f(t, h(t)) - M(u(t) - h(t)), \\ u(0) = u(1) = \theta, \end{cases} \tag{4.5.5}$$

直接验证可知:

$$\begin{aligned}u(t) = {}& t\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r f(s, h(s))\mathrm{d}s - Mt\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r (u(s) \\ & - h(s))\mathrm{d}s + M\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r (u(s) - h(s))\mathrm{d}s \\ & - \int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r f(s, h(s))\mathrm{d}s\end{aligned}$$

是两点边值问题(4.5.5) 的惟一解.

$\forall h \in \langle v_0, w_0\rangle$,定义 $Ah = u$,其中 Ah 满足以下方程:

$$\begin{aligned}Ah = {}& t\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r f(s, h(s))\mathrm{d}s - Mt\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r ((Ah)(s) - h(s))\mathrm{d}s \\ & + M\int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r ((Ah)(s) - h(s))\mathrm{d}s - \int_0^t \mathrm{d}r\int_0^r f(s, h(s))\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

则 A 映 $\langle v_0, w_0\rangle$ 入 $C[I,E]$，易知，h 是(4.5.1)式的解当且仅当 $Ah = h$. 事实上，若 $Ah = h$，则对(4.5.6)式两边关于 t 求二阶导数得

$$(Ah)'' = M((Ah)(t) - h(t)) - f(t,h(t)),$$

故有 $h'' = -f(t,h(t))$，显然有 $h(0) = h(1) = \theta$，即 h 是两点边值问题(4.5.1)式的解.

反之，若 h 是(4.5.1)式的解，由于 $-h'' = f(t,h(t))$，有

$$\begin{aligned}(Ah)''(t) &= M((Ah)(t) - h(t)) - f(t,h(t)) \\ &= M((Ah)(t) - h(t)) + h''(t),\end{aligned}$$

即
$$(Ah - h)'' - M(Ah - h) = \theta,$$

由 $h(0) = h(1) = \theta$ 得线性微分方程两点边值问题.

$$\begin{cases}(Ah - h)''(t) - M(Ah - h)(t) = \theta, \\ (Ah - h)''(0) = (Ah - h)''(1) = \theta,\end{cases} \tag{4.5.7}$$

显然问题(4.5.7)式仅有零解，即 $Ah = h$.

此外，迭代序列(4.5.4)式可写为

$$v_n = Av_{n-1}, w_n = Aw_{n-1} \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{4.5.8}$$

下面证明

$$v_0 \leqslant Av_0, \quad Aw_0 \leqslant w_0, \tag{4.5.9}$$

$$\forall \varphi \in P^* = \{\varphi \in E^* \mid \varphi(x) \geqslant 0, \forall x \in P\},$$

其中 E^* 为 E 的共轭空间，P^* 为 P 的共轭锥.
令

$$m(t) = \varphi(v_0(t) - v_1(t)),$$

注意 v_1 满足 $-v_1''(t) = f(t,v_0) - M(v_1 - v_0)$，又有

$$-v_0'' \leqslant f(t,v_0)，故$$

$$\begin{aligned}m''(t) &= \varphi(v_0''(t) - v_1''(t)) \geqslant \varphi(-f(t,v_0) - v_1''(t)) \\ &= \varphi(-M(v_1 - v_0)) = Mm(t),\end{aligned}$$

即
$$m''(t) \geqslant M \cdot m(t). \tag{4.5.10}$$

由(4.5.4)式知 $v_1(0) = v_1(1) = \theta$，故有 $v_0(0) \geqslant v_0(1)$，得

$$m(0) = m(v_0(0) - v_1(0)) \geqslant \varphi(v_0(1) - v_1(1)) = m(1). \tag{4.5.11}$$

现证明 $$m(t)\leqslant 0,\quad \forall t\in I,$$
如若不然,必存在 $t_0\in I, m(t_0)=\max\limits_{t\in I}m(t)>0$. 由(4.5.11)式可取 $t_0\neq 1$,故 $t_0\in[0,1)$,于是 $m''(t_0)\leqslant 0$,结合(4.5.10)式得
$$0\geqslant m''(t_0)\geqslant Mm(t_0)>0,$$
产生矛盾. 故 $m(t)\leqslant 0, \forall t\in I$. 由 $\varphi\in P^*$ 是任取的,可知
$$\varphi(v_0(t)-v_1(t))\leqslant 0,$$
这表明 $v_0\leqslant v_1=Av_0$. 同理可证, $Aw_0\leqslant w_0$,即(4.5.9)式成立.

任给 $v_0\leqslant h_1\leqslant h_2\leqslant w_0$,由假设(2)知:
$$f(t,h_1(t))+Mh_1(t)\leqslant f(t,h_2(t))+Mh_2(t),\tag{4.5.12}$$
来证明
$$Ah_1\leqslant Ah_2,\quad \forall h_1\leqslant h_2,\tag{4.5.13}$$
因为
$$\begin{cases}-(Ah_i)''(t)=f(t,h_i(t))+Mh_i(t)-M(Ah_i)(t),\\(Ah_i)(0)=(Ah_i)(1)=\theta,\quad i=1,2\end{cases}$$
令
$$p(t)=\varphi((Ah_2)(t)-(Ah_1)(t)), \forall \varphi\in P^*,$$
$$\begin{aligned}p''(t)&=\varphi((Ah_2)''(t)-(Ah_1)''(t))\\&=M\varphi((Ah_2)(t)-(Ah_1)(t))-\varphi[f(t,h_2(t))\\&\quad+Mh_2(t)-f(t,h_1(t)+Mh_1(t))].\end{aligned}$$
由(4.5.12)式得
$$p''(t)\leqslant M\varphi(Ah_2-Ah_1),$$
即 $p''(t)\leqslant Mp(t)$,易知 $p(0)=p(1)=0$,
易证
$$p(t)\geqslant 0, \forall t\in I.$$
若不然,必存在
$$t_0\in I, p(t_0)=\min_{t\in I}p(t)<0,$$
由 $p(0)=p(1)=0$,可取 $t_0\neq 0,1$,即 $t_0\in(0,1)$,于是

$$p''(t_0) > 0,$$

故有

$$0 \leqslant p''(t_0) \leqslant Mp(t_0) < 0,$$

产生矛盾.故 $p(t) \geqslant 0, \forall t \in I$,即

$$\varphi(Ah_2 - Ah_1) \geqslant 0.$$

由于 $\varphi \in P^*$ 是任取的,故得

$$Ah_1 \leqslant Ah_2, \quad \forall h_1 \leqslant h_2,$$

由(4.5.8)、(4.5.9)、(4.5.13)式,并注意到 $v_0 \leqslant w_0$,可知

$$v_0 \leqslant v_1 \leqslant \cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant w_n \leqslant \cdots \leqslant w_2 \leqslant w_1 \leqslant w_0. \tag{4.5.14}$$

下面证明 $\{v_n\}$ 是 $C[I,E]$ 中的基本列.

用反证法.设 $\{v_n\}$ 在 $C[I,E]$ 中不是基本列,则必存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及 $\{n\}$ 的子列 $\{n_i'\}$ 与 $\{n_i''\}$ 以及 $t_i \in I(i = 1,2,\cdots)$,使

$$\| v_{n_i'}(t_i) - v_{n_i''}(t_i) \| \geqslant \varepsilon_0 \tag{4.5.15}$$

不失一般性,可设 t_i 收敛于某 $t^* \in I$, $\forall h \in \langle v_0, w_0\rangle$,由假设(2)知

$$f(t, w_0) + Mw_0 \geqslant f(t,h) + Mh \geqslant f(t, v_0) + Mv_0.$$

由 P 是正规锥,知存在常数 $N > 0$,使

$$\| f(t,h) + Mh \|_C \leqslant N, \quad \forall h \in \langle v_0, w_0\rangle. \tag{4.5.16}$$

对每个 v_n 及 $t_1, t_2 \in I$(不妨设 $t_1 \leqslant t_2$),由(4.5.4)式可知

$$\begin{aligned} &v_n(t_1) - v_n(t_2) \\ &= (t_1 - t_2)\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r f(s, v_{n-1}(s))\mathrm{d}s \\ &\quad - M(t_1 - t_2)\int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^r (v_n(s) - v_{n-1}(s))\mathrm{d}s \\ &\quad - M\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}r\int_0^r (v_n(s) - v_{n-1}(s))\mathrm{d}s + \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}r\int_0^r f(s, v_{n-1}(s))\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由 P 的正规性知 $C[I,E]$ 中锥 $P_c = \{u \in C[I,E] \mid u(t) \geqslant 0, \forall t \in I\}$ 是正规的,从而 $\langle v_0, w_0\rangle$ 是 $C[I,E]$ 中有界集.于是

$$\| v_n(t_1) - v_n(t_2) \|$$

$$\leqslant |t_1 - t_2| \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^r \| f(s, v_{n-1}(s)) + M v_{n-1}(s) \| \mathrm{d}s$$
$$+ M |t_1 - t_2| \cdot \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^r \| v_n(s) \| \mathrm{d}s$$
$$+ M \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}r \int_0^r \| f(s, v_{n-1}(s)) + M v_{n-1}(s) \| \mathrm{d}s$$
$$+ M \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}r \int_0^r \| v_n(s) \| \mathrm{d}s$$
$$\leqslant N |t_1 - t_2| + MK |t_1 - t_2| + MN |t_1 - t_2| + MK |t_2 - t_1|,$$

式中 $K > 0$,使$\int_0^r \| v_n(s) \| \mathrm{d}s \leqslant K (r \in I)$ 成立.故必存在与 n 无关的 $\delta > 0$,使得只要 $t_1, t_2 \in I$, $|t_1 - t_2| < \delta$ 就有

$$\| v_n(t_1) - v_n(t_2) \| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{4},$$

由 $t_i \to t^*$ 知,存在 i_0,当 $i \geqslant i_0$ 时有 $|t_i - t^*| < \delta$,所以,$\forall i \geqslant i_0$,有

$$\| v_{n_i'}(t_i) - v_{n_i'}(t^*) \| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{4}, \| v_{n_i''}(t_i) - v_{n_i''}(t^*) \| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{4}, \tag{4.5.17}$$

由(4.5.15)式与(4.5.17)式可知,当 $i \geqslant i_0$ 时

$$\| v_{n_i'}(t^*) - v_{n_i''}(t^*) \| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}, \tag{4.5.18}$$

这表明$\{v_n(t^*)\}$ 在 E 中不是基本列.

由于 P 是正规锥,据文献[12]命题19.4可知,P^* 是再生锥,即对任给 $l \in E^*$,存在 $l_1 \in P^*$,$l_2 \in P^*$,使得 $l = l_1 - l_2$,由(4.5.14)式知

$$l_i(v_0(t^*)) \leqslant l_i(v_1(t^*)) \leqslant \cdots \leqslant l_i(v_n(t^*)) \leqslant \cdots \leqslant l_i(w_0(t^*)), i = 1,2,$$

这表明$\{l_i(v_n(t^*))\}(i = 1,2)$,从而$\{l(v_n(t^*))\}$ 是 R^1 中基本列,由 $l \in E^*$ 的任意性知,$\{v_n(t^*)\}$ 是 E 中的弱基本列.又因 E 是弱

序列完备的,故必存在 $y \in E$,使 $v_n(t^*) \xrightarrow{\text{弱}} y$. 由于 $\{v_n(t^*)\}$ 在范数意义下不是基本列,故必存在 $\varepsilon_1 > 0$ 及 $\{v_n(t^*)\}$ 的某子列 $\{v_{n_i}(t^*)\}$,使得

$$\| v_{n_i}(t^*) - y \| \geqslant \varepsilon_1 \quad (i = 1,2,\cdots), \tag{4.5.19}$$

由于 P 是正规锥,故必存在 $N_1 > 0$,使对 $\theta \leqslant x \leqslant z$,有 $\| x \| \leqslant N_1 \| z \|$. 由于 $\{v_{n_i}(t^*)\}$ 弱收敛于 y,据[10]第5章定理2知,存在 $\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$,使

$$\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_{n_i}(t^*) - y \| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2N_1}, \tag{4.5.20}$$

其中 k 是某自然数,由(4.5.14)式及 $v_n(t^*) \xrightarrow{\text{弱}} y$ 可知,有 $v_n(t^*) \leqslant y (n = 1,2,\cdots)$,从而由(4.5.14)式可知

$$\theta \leqslant y - v_{n_k}(t^*) \leqslant y - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_{n_i}(t^*).$$

据 N_1 的定义及(4.5.20)式可得

$$\| y - v_{n_k}(t^*) \| \leqslant N_1 \| y - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_{n_i}(t^*) \| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

这与(4.5.19)式矛盾,这表明 $\{v_n\}$ 是 $C[I,E]$ 中的基本列,从而存在 $r = r(t) \in C[I,E]$,使 $\{v_n\}$ 在 $C[I,E]$ 中收敛于 r. 注意到 $\{v_n\}$ 满足

$$\begin{cases} -v_n''(t) = f(t, v_{n-1}(t)) - M(v_n(t) - v_{n-1}(t)), \\ v_n(0) = v_n(1) = \theta, \end{cases}$$

用常规证法可知,$\{v_n''(t)\}$ 在 I 上依 E 中的范数一致收敛于 $r''(t)$,且 $r(t)$ 是两点边值问题(4.5.1)式的解.

同理可证,$\{w_n\}$ 在 $C[I,E]$ 中收敛于 $p = p(t)$,且 $p(t)$ 是两点边值问题(4.5.1)的解.

最后证明 p 和 r 分别是问题(4.5.1)式在 $\langle v_0, w_0 \rangle$ 中的最大解与最小解.

设 $u \in \langle v_0, w_0 \rangle$ 是(4.5.1) 式的任一解,于是

$$v \leqslant u \leqslant w_0, Au = u.$$

由(4.5.13) 式知,

$$Av_0 \leqslant Au \leqslant Aw_0, \quad \text{即} \quad v_0 \leqslant u \leqslant w_1,$$

由归纳法易知

$$v_n \leqslant u \leqslant w_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

令 $n \to \infty$,取极限得 $r \leqslant u \leqslant p$,即

$$r(t) \leqslant u(t) \leqslant p(t), t \in I. \quad \#$$

注:上述过程没有使用紧型条件,又由于 $C[I, E]$ 中锥

$$P_c = \{u(t) \in C[I, E] \mid u(t) \geqslant \theta, t \in I\}$$

不是正则锥,故定理 4.1.2 及其系不能应用.

第五章　一致 u_0 - 凹算子方程逼近解

将 u_0 - 凹算子的凹性再进一步加强,就得到一种所谓的"一致 u_0 - 凹算子"的概念,以后将看到,一致 u_0 - 凹算子有许多很好的性质.为了突出其重要性,特将这部分的内容辟为一章,以便系统而深入地讨论一致 u_0 - 凹算子的相关理论.

§5.1　一致 u_0 - 凹算子列的极限算子的正谱

定义 5.1.1　设 $\theta \neq u_0 \in P$,作用在具锥 P 的 Banach 空间 E 上正的(即 $AP \subset P$)增算子 A,称做是**一致 u_0 - 凹算子**,如果:

(1) $\forall\, \theta \neq x \in P, \exists\, \beta > \alpha > 0 (\beta = \beta(x), \alpha = \alpha(x))$,使

$$\alpha u_0 \leqslant Ax \leqslant \beta u_0.$$

(2) 对任给的 $0 < \mu < \upsilon$ 及 $0 < a < b < 1, \exists\, \eta = \eta(\mu, \upsilon, a, b) > 0$,
使

$$A(tx) \geqslant (1 + \eta) tAx$$

对一切满足 $\mu u_0 \leqslant x \leqslant \upsilon u_0$ 的 x 及一切 $t \in [a, b]$ 皆成立.

在本节当中,我们总假设 P 是实 Banach 空间 E 中的一个正规锥.

И.А.Бахтин 曾对一致 u_0 - 凹算子的正谱(即对应于正固有元的正固有值的全体)进行了研究(见文献[32]),他证明了一致 u_0 - 凹算子的正谱一定是某开区间(ξ, ζ)(如果不空的话),并且对每个 $\lambda \in (\xi, \zeta)$,刚好有惟一的正固有元 $\varphi(\lambda)$.

而郭大钧先生则在此基础上研究了一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ 的极限算子的正谱,亦即,假定 A_n 按适当的意义收敛于 A,要来讨论 A_n 的正谱及正固有元与 A 的正谱及正固有元之间的关系. 下面我们就来介绍郭大钧先生在这方面所做的工作.

为此,先引入几个概念.

定义 5.1.2　设 $\{A_n\}$ 是一串一致 u_0 - 凹算子, A 是正的增算子,如果对任何 $\varphi \in P(\varphi \neq \theta)$,都有

$$\| A_n\varphi - A\varphi \|_{u_0} \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{5.1.1}$$

则称 A_n **u_0 - 强敛于** A.

如果 A_n u_0 - 强敛于 A,并且对任何 $0 < \mu < \upsilon$,极限式(5.1.1)对于一切满足 $\mu u_0 \leqslant \varphi \leqslant \upsilon u_0$ 的 φ 是一致的,则称 A_n **u_0 - 匀敛于** A.

定义 5.1.3　设 $\{A_n\}$ 是一串一致 u_0 - 凹算子,如果对于任何 $\varphi \in P(\varphi \neq \theta)$,都有 $\beta > \alpha > 0$ 存在,使

$$\alpha u_0 \leqslant A_n\varphi \leqslant \beta u_0 \quad (n = 1,2,\cdots), \tag{5.1.2}$$

并且对任何 $0 < \mu < \upsilon, 0 < a < b < 1$,都有 $\eta = \eta(\mu, \upsilon, a, b) > 0$ 存在,使不等式

$$A_n(t\varphi) \geqslant (1 + \eta) t A_n\varphi \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{5.1.3}$$

对一切 $\varphi(\mu u_0 \leqslant \varphi \leqslant \upsilon u_0)$ 及一切 $t \in [a, b]$ 皆满足,则称诸一致 u_0 - **凹算子** A_n **是等度的**.

注:显然,条件(5.1.3)等价于下面的条件:对任何 $0 < \bar{\mu} < \bar{\upsilon}, 1 < c < d$,都有 $\eta = \eta(\mu, \upsilon, c, d) > 0$ 存在,使不等式

$$A_n(\tau\varphi) \leqslant (1 - \bar{\eta}) \tau A_n\varphi \quad (n = 1,2,\cdots) \tag{5.1.4}$$

对一切 $\varphi(\mu u_0 \leqslant \varphi \leqslant \upsilon u_0)$ 及一切 $\tau \in [c, d]$ 均满足.

引理 5.1.1　设一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ u_0 - 匀敛于 A,则 A 仍为一致 u_0 - 凹算子的充要条件是诸 A_n 是等度的.

证　先证充分性. 设诸 A_n 是等度的,任给 $\varphi \in P, \varphi \neq \theta$,则(5.1.2)式成立,但由 u_0 - 强敛知,当 n 充分大时,有

$$-\frac{\alpha}{2}u_0\leqslant A_n\varphi - A\varphi\leqslant\frac{\alpha}{2}u_0,$$

故
$$A\varphi\geqslant A_n\varphi-\frac{\alpha}{2}u_0\geqslant\frac{\alpha}{2}u_0,$$

$$A\varphi\leqslant A_n\varphi+\frac{\alpha}{2}u_0\leqslant(\beta+\frac{\alpha}{2})u_0.$$

现任给 $0<\mu<v, 0<a<b<1$，下证对一切 $\varphi(\mu u_0\leqslant\varphi\leqslant vu_0)$ 及一切 $t\in[a,b]$ 恒有

$$A(t\varphi)\geqslant(1+\frac{\eta}{2})tA\varphi, \tag{5.1.5}$$

其中 η 是使(5.1.3)式成立者．事实上，由 A_n 的等度性知存在 $\beta_1>\alpha_1>0$，使

$$\alpha_1 u_0\leqslant A_n(\mu u_0)\leqslant\beta_1 u_0\quad(n=1,2,\cdots), \tag{5.1.6}$$

取定 ε_0，使 $0<\varepsilon_0<\dfrac{\eta a\alpha_1}{\eta b+2b+2}$．由 u_0－匀敛性知，当 n 充分大时，对所有的 $\psi(a\mu u_0\leqslant\psi\leqslant vu_0)$，均有

$$\|A_n\psi - A\psi\|_{u_0}<\varepsilon_0.$$

于是，当 $\mu u_0\leqslant\varphi\leqslant vu_0, t\in[a,b]$ 时，有

$$\begin{aligned}A(t\varphi)&\geqslant A_n(t\varphi)-\varepsilon_0u_0\geqslant(1+\eta)tA_n\varphi-\varepsilon_0u_0\\&\geqslant(1+\frac{\eta}{2})tA_n\varphi+\frac{\eta}{2}aA_n(\mu u_0)-\varepsilon_0u_0\\&\geqslant(1+\frac{\eta}{2})t(A\varphi-\varepsilon_0u_0)+\frac{1}{2}\eta a\alpha_1u_0-\varepsilon_0u_0\\&\geqslant(1+\frac{\eta}{2})tA\varphi-(1+\frac{\eta}{2})b\varepsilon_0u_0+\frac{1}{2}\eta a\alpha_1u_0-\varepsilon_0u_0\\&\geqslant(1+\frac{\eta}{2})tA\varphi,\end{aligned}$$

故(5.1.5)式成立，充分性获证．

下证必要性，设 A 是一致 u_0－凹算子，先证(5.1.2)式成立，任给 $\varphi\in P(\varphi\neq\theta)$．

于是，有 $\beta>\alpha>0$ 存在，使

$$\alpha u_0\leqslant A\varphi\leqslant\beta u_0.$$

又因为 n 充分大($n > N$)时,有

$$\| A_n\varphi - A\varphi \|_{u_0} < \frac{\alpha}{2}u_0,$$

由此易知

$$\alpha_0 u_0 \leqslant A_n\varphi \leqslant \beta_0 u_0 \quad (\text{当 } u > N \text{ 时}), \qquad (5.1.7)$$

其中 $\alpha_0 = \frac{\alpha}{2}, \beta_0 = \beta + \frac{\alpha}{2}$,又由 A_n 的一致 u_0 - 凹性知有:$\beta_n > \alpha_n > 0 (n = 1,2,\cdots,N)$ 存在,使

$$\alpha_n u_0 \leqslant A_n\varphi \leqslant \beta_n u_0 \quad (n = 1,2,\cdots N). \qquad (5.1.8)$$

于是,令 $\alpha = \min\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}, \beta = \max\{\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_N\}$,由(5.1.7)式与(5.1.8)式即知(5.1.2)式成立.最后证(5.1.3)式成立.与上面类似,只需证(5.1.3)式对充分大的 n 成立即可,由 A 的一致 u_0 - 凹性知有 $\eta_0 > 0$ 存在,使

$$A(t\varphi) \geqslant (1 + \eta_0)tA\varphi$$

对一切满足 $\mu u_0 \leqslant \varphi \leqslant \upsilon u_0$ 的 φ 及一切 $t \in [a,b]$ 皆成立.于是,仿不等式(5.1.5)的证明可证当 n 充分大时,(5.1.3)式成立,其中 $\eta = \frac{\eta_0}{2}$. #

定理 5.1.1 设一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ u_0 - 匀敛于一致 u_0 - 凹算子 A,如果 $\lambda_0 > 0$ 属于 A 的正谱,则当 n 充分大时,λ_0 也属于 A_n 的正谱,并且

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_n(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0) \|_{u_0} = 0, \qquad (5.1.9)$$

其中 $\varphi(\lambda_0)$ 与 $\varphi_n(\lambda_0)$ 分别表 A 与 A_n 对应于 λ_0 的惟一正固有元.

证 由 $\varphi(\lambda_0) = \frac{1}{\lambda_0}A\varphi(\lambda_0)$,根据 A 的一致 u_0 - 凹性知:有 $\beta_0 > \alpha_0 > 0$ 存在,使

$$\alpha_0 u_0 \leqslant \varphi(\lambda_0) \leqslant \beta_0 u_0, \qquad (5.1.10)$$

任给 $\varepsilon > 0$,取定 t_0 及 τ_0,使

$$0 < 1 - t_0 < \frac{\varepsilon}{\beta_0}, \quad 0 < \tau_0 - 1 < \frac{\varepsilon}{\beta_0}, \qquad (5.1.11)$$

由引理 5.1.1 知，诸 A_n 是等度的，从而由(5.1.3)式及(5.1.4)式知：有 $\eta > 0$ 与 $\bar{\eta} > 0$ 存在，使

$$A_n[t_0\varphi(\lambda_0)] \geqslant (1+\eta)t_0A_n\varphi(\lambda_0) \quad (n = 1,2,\cdots), \tag{5.1.12}$$

$$A_n[\tau_0\varphi(\lambda_0)] \leqslant (1-\bar{\eta})\tau_0A_n\varphi(\lambda_0) \quad (n = 1,2,\cdots), \tag{5.1.13}$$

然后，取定一个 $\delta(0 < \delta < \lambda_0)$ 充分小，使

$$\frac{\lambda_0+\delta}{\lambda_0-\delta} < \min\left\{1+\eta, \frac{1}{1-\bar{\eta}}\right\}. \tag{5.1.14}$$

由 u_0 - 匀敛性知，有正整数 N 存在，使当 $n > N$ 时，恒有：

$$\| A_n\varphi(\lambda_0) - A\varphi(\lambda_0) \|_{u_0} < \alpha_0\delta. \tag{5.1.15}$$

下面证明当 $n > N$ 时，λ_0 必属于 A_n 的正谱，并且

$$\| \varphi_n(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0) \|_{u_0} < \varepsilon. \tag{5.1.16}$$

以下恒设 $n > N$，由(5.1.15)式及(5.1.10)式得

$$A_n\varphi(\lambda_0) \geqslant A\varphi(\lambda_0) - \alpha_0\delta u_0 \geqslant (\lambda_0-\delta)\varphi(\lambda_0), \tag{5.1.17}$$

从而，由(5.1.12)式及(5.1.14)式知

$$\begin{aligned} A_n[t_0\varphi(\lambda_0)] &\geqslant (1+\eta)(\lambda_0-\delta)t_0\varphi(\lambda_0) \\ &\geqslant (\lambda_0+\delta)t_0\varphi(\lambda_0), \end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{\lambda_0+\delta}A_n[t_0\varphi(\lambda_0)] \geqslant t_0\varphi(\lambda_0) \tag{5.1.18}$$

另一方面，由(5.1.15)式及(5.1.10)式，有

$$A_n\varphi(\lambda_0) \leqslant A\varphi(\lambda_0) + \alpha_0\delta u_0 \leqslant (\lambda_0+\delta)\varphi(\lambda_0),$$

即

$$\frac{1}{\lambda_0+\delta}A_n\varphi(\lambda_0) \leqslant \varphi(\lambda_0), \tag{5.1.19}$$

于是由(5.1.18)式与(5.1.19)式，利用文献[32]中定理1知，$\lambda_0+\delta$ 属于 A_n 的正谱，并且

$$t_0\varphi(\lambda_0) \leqslant \varphi_n(\lambda_0+\delta) \leqslant \varphi(\lambda_0), \tag{5.1.20}$$

其中 $\varphi_n(\lambda_0+\delta)$ 表示 A_n 对应于固有值$\lambda_0+\delta$ 的惟一正固有元.另一方面,由(5.1.13)式、(5.1.19)式及(5.1.14)式,得

$$A_n[\tau_0\varphi(\lambda_0)] \leqslant (1-\bar{\eta})(\lambda_0+\delta)\tau\varphi_0(\lambda_0) \leqslant (\lambda_0-\delta)\tau_0\varphi(\lambda_0), \tag{5.1.21}$$

于是,由(5.1.17)式和(5.1.21)式,应用文献[32]中的定理1,知 $\lambda_0-\delta$ 属于A_n 的正谱,并且

$$\varphi(\lambda_0) \leqslant \varphi_n(\lambda_0-\delta) \leqslant \tau_0\varphi(\lambda_0), \tag{5.1.22}$$

其中 $\varphi_n(\lambda_0-\delta)$ 表示 A_n 的对应于固有值$\lambda_0-\delta$ 的惟一正固有元.

现在,由

$$\varphi_n(\lambda_0+\delta) = \frac{1}{\lambda_0+\delta}A_n\varphi_n(\lambda_0+\delta) \leqslant \frac{1}{\lambda_0}A_n\varphi_n(\lambda_0+\delta),$$

$$\varphi_n(\lambda_0-\delta) = \frac{1}{\lambda_0-\delta}A_n\varphi_n(\lambda_0-\delta) \geqslant \frac{1}{\lambda_0}A_n\varphi_n(\lambda_0-\delta),$$

应用文献[32]中定理1即知,λ_0 属于 A_n 的正谱,并且

$$\varphi_n(\lambda_0+\delta) \leqslant \varphi_n(\lambda_0) \leqslant \varphi_n(\lambda_0-\delta), \tag{5.1.23}$$

于是,由(5.1.20)式、(5.1.22)式以及(5.1.23)式,得

$$(t_0-1)\varphi(\lambda_0) \leqslant \varphi_n(\lambda_0)-\varphi(\lambda_0) \leqslant (\tau_0-1)\varphi(\lambda_0), \tag{5.1.24}$$

但由(5.1.10)式与(5.1.11)式,易知

$$(t_0-1)\varphi(\lambda_0) \geqslant -\varepsilon u_0, \quad (\tau-1)\varphi(\lambda_0) \leqslant \varepsilon u_0,$$

由此,再注意到(5.1.24)式即得(5.1.16)式. #

注:由于假定了锥 P 是正规的,故据定理3.3.1(3°)知,按 u_0-范数收敛必按 E 中范数收敛,因此,由(5.1.9)式得

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n(\lambda_0)-\varphi(\lambda_0)\| = 0. \tag{5.1.25}$$

定义5.1.4 设A与B都是正算子,如果对任何 $\varphi\in P(\varphi\neq\theta)$ 皆满足 $A\varphi\leqslant B\varphi$,则记为 $A\leqslant B$(或 $B\geqslant A$).

如果正算子列$\{A_n\}$ 满足

$$A_n \leqslant A_{n+1} \quad (n=1,2,\cdots), \tag{5.1.26}$$

则称$\{A_n\}$是递增的;类似地可定义递减的正算子列.

引理 5.1.2 设一串递增的一致 u_0 - 凹算子列$\{A_n\}$ u_0 - 匀敛于一致 u_0 - 凹算子 A,则必

$$A_n \leqslant A \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{5.1.27}$$

证 设 $\varphi \in P(\varphi \neq \theta)$,于是,有 $\upsilon > \mu > 0$ 存在,使

$$\mu u_0 \leqslant A\varphi \leqslant \upsilon u_0$$

对任何 $0 < \gamma < 1$ 以及任何 n,可取一个 p 充分大,使

$$\| A\varphi - A_{n+p}\varphi \|_{u_0} < (1-\gamma)\mu,$$

从而由(5.1.26)式知

$$\begin{aligned} A\varphi - \gamma A_n\varphi &\geqslant A\varphi - \gamma A_{n+p}\varphi = (1-\gamma)A\varphi + \gamma(A\varphi - A_{n+p}\varphi) \\ &\geqslant (1-\gamma)\mu u_0 - \gamma(1-\gamma)\mu u_0 = (1-\gamma)^2\mu u_0 \geqslant \theta, \end{aligned}$$

故 $A\varphi \geqslant \gamma A_n\varphi$;由此,根据 γ 的任意性,令 $\gamma \to 1^-$,即得 $A\varphi \geqslant A_n\varphi$.

#

定理 5.1.2 在定理 5.1.1 的条件下,如果$\{A_n\}$是递增的,则(5.1.9)式中诸 $\varphi_n(\lambda_0)$ 也必是递增的:

$$\varphi_1(\lambda_0) \leqslant \varphi_2(\lambda_0) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_n(\lambda_0) \leqslant \cdots \leqslant \varphi(\lambda_0). \tag{5.1.28}$$

如果$\{A_n\}$是递减的,则(5.1.9)式中诸 $\varphi_n(\lambda_0)$ 也必是递减的:

$$\varphi_1(\lambda_0) \geqslant \varphi_2(\lambda_0) \geqslant \cdots \geqslant \varphi_n(\lambda_0) \geqslant \cdots \geqslant \varphi(\lambda_0) \tag{5.1.29}$$

证 只就递增的情形证之,由于

$$A_n\varphi_{n+1}(\lambda_0) \leqslant A_{n+1}\varphi_{n+1}(\lambda_0) = \lambda_0\varphi_{n+1}(\lambda_0),$$
$$A_n\varphi_n(\lambda_0) = \lambda_0\varphi_n(\lambda_0),$$

故根据文献[32]中定理 1 即知

$$\varphi_n(\lambda_0) \leqslant \varphi_{n+1}(\lambda_0).$$

此外,由引理 5.1.2 知

$$A\varphi_n(\lambda_0) \geqslant A_n\varphi_n(\lambda_0) = \lambda_0\varphi_n(\lambda_0), \tag{5.1.30}$$

另外,有

$$A\varphi(\lambda_0) = \lambda_0\varphi(\lambda_0). \tag{5.1.31}$$

由(5.1.30)式与(5.1.31)式同样根据文献[32]中定理1,得

$$\varphi_n(\lambda_0) \leqslant \varphi(\lambda_0). \quad \#$$

设一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ u_0 - 匀敛于一致 u_0 - 凹算子 A,以下恒设 A 的正谱不空(例如,当 A 还是全连续的时候,其正谱就不空,参看文献[33],P 285,引理3.5),从而是某一开区间 (ξ,ζ),由定理5.1.1知 A_n 的正谱也不空(n 充分大时),设为开区间 (ξ_n,ζ_n),下面我们研究 (ξ_n,ζ_n) 与 (ξ,ζ) 之间的关系.

定理5.1.3 设一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ u_0 - 匀敛于一致 u_0 - 凹算子 A,则必

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n \leqslant \xi, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\zeta_n \geqslant \zeta. \tag{5.1.32}$$

证 只证(5.1.32)式中第一个不等式,第二个不等式类似可证,用反证法.设若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\xi_n > \xi$,则有 ξ_n 的一子列 ξ_{n_k} 存在,使

$$\xi_{\eta_k} > \xi + \varepsilon_0 (k = 1,2,\cdots), \tag{5.1.33}$$

其中,ε_0 是某正数满足 $0 < \varepsilon_0 < \zeta - \xi$.显然 $\xi + \varepsilon_0$ 属于 A 的正谱 (ξ,ζ),从而根据定理5.1.1知,当 n 充分大时,$\xi + \varepsilon_0$ 也必属于 A_n 的正谱,此显然与(5.1.33)式矛盾. #

系:设一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ u_0 - 匀敛于一致 u_0 - 凹算子 A,那么

(1) 若 $\{A_n\}$ 中存在递增子列 $\{A_{n_k}\}$,则必 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\zeta_n = \zeta$;

(2) 若 $\{A_n\}$ 中存在递减子列 $\{A_{m_i}\}$,则必 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\xi_n = \xi$.

证 只证(1),而(2)可类似地证明.

根据(5.1.32)式,只需证明 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\zeta_n \leqslant \zeta$.

用反证法,若不然,注意到(5.1.32)式,则有

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\zeta_{n_k} \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\zeta_n > \zeta > \xi \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\xi_{n_k},$$

于是,必存在 $\{n_k\}$ 的子列 $\{n_{k_i}\}$,使

$$\zeta_{n_{k_i}} > \zeta > \xi_{n_{k_i}} \quad (i = 1,2,\cdots),$$

故 ζ 属于$A_{n_{k_i}}$ 的正谱,设对应的正固有元为 φ_i,于是,根据引理2,知

$$A\varphi_i \geqslant A_{n_{k_i}}\varphi_i = \zeta\varphi_i \quad (i = 1,2,\cdots). \tag{5.1.34}$$

另一方面,取 λ^*,使 $\xi < \lambda^* < \zeta$,令 A 对应于固有值λ^* 的正固有元为 φ^*,则

$$A\varphi^* = \lambda^*\varphi^* \leqslant \zeta\varphi^*. \tag{5.1.35}$$

由(5.1.34)式与(5.1.35)式,应用文献[32]中定理1即知,ζ 属于A 的正谱,矛盾. #

定理5.1.4 设一致 u_0 - 凹算子列 $A_n u_0$ - 匀敛于一致 u_0 - 凹算子 A,如果$\{A_n\}$ 是递增的,则下列结论成立:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n = \zeta$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = \xi$ 成立的充要条件是:对于任意的 $\varepsilon > 0$,有 λ_0(其中$\varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n < \lambda_0 < \varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n + \varepsilon$) 及 $\varphi_0 \in P(\varphi_0 \neq \theta)$ 存在,使

$$A\varphi_0 \leqslant \lambda_0\varphi_0. \tag{5.1.36}$$

证 先证结论(1).根据(5.1.32)式,只需证

$$\varlimsup_{n\to\infty}\zeta_n = \zeta. \tag{5.1.37}$$

用反证法,设(5.1.37)式不成立,则注意到(5.1.32)式有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\zeta_n > \zeta > \xi \geqslant \varlimsup_{n\to\infty}\xi_n,$$

于是,存在子列,使

$$\zeta_{n_k} > \zeta > \xi_{n_k} \quad (k = 1,2,\cdots).$$

以下可仿定理5.1.3的系(1)的证明过程而得出矛盾.

现证结论(2).条件(5.1.36)的必要性是显然的,故只需证其充分性,设条件(5.1.36)满足,要证$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = \xi$.根据(5.1.32)式,只需证$\varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n \geqslant \xi$ 即可,仍用反证法.设若 $\varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n < \xi$,则由假定知有 λ_0($\varliminf\limits_{n\to\infty}\xi_n < \lambda_0 < \xi$) 及 $\varphi_0 \in P(\varphi_0 \neq \theta)$ 存在,使(5.1.36)式成立.另一方面,由

$$\varliminf_{n\to\infty}\xi_n < \lambda_0 < \xi < \zeta \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\zeta_n$$

知，有子列存在，使

$$\xi_{n_k} < \lambda_0 < \zeta_{n_k} \quad (k = 1,2,\cdots),$$

故 λ_0 属于 A_{n_k} 的正谱；令对应的正固有元为 φ_k，则根据引理5.1.2知

$$A\varphi_k \geqslant A_{n_k}\varphi_k = \lambda_0\varphi_{n_k}, \tag{5.1.38}$$

由(5.1.36)式及(5.1.38)式即知，λ_0 属于 A 的正谱，这显然与 $\lambda_0 < \xi$ 矛盾. #

类似地，可证下面的定理5.1.5：

定理5.1.5　设一致 u_0－凹算子列 $\{A_n\}$ u_0－匀敛于一致 u_0－凹算子 A，如果 $\{A_n\}$ 是递减的，则下列结论成立：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = \xi$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\zeta_n = \zeta$ 成立的充分必要条件是：对于任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\lambda_1(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\zeta_n - \varepsilon < \lambda_1 < \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\zeta_n)$ 及 $\varphi_1 \in P(\varphi_1 \neq \theta)$ 存在，使

$$A\varphi_1 \geqslant \lambda_1\varphi_1 \tag{5.1.39}$$

定理5.1.6　设一致 u_0－凹算子列 $\{A_n\}$ u_0－匀敛于一致 u_0－凹算子 A，则

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi, \quad \lim_{n\to\infty}\zeta_n = \zeta_n \tag{5.1.40}$$

成立的充要条件是：从

$$\begin{cases} A_{n_i}\varphi_i = \lambda_0\varphi_i(\varphi_i \geqslant \theta, \varphi_i \neq \theta), \\ \xi_{n_i} < \lambda_0 - \varepsilon_0 < \lambda_0 + \varepsilon_0 < \zeta_{n_i}(i = 1,2,\cdots), \varepsilon_0 > 0, \end{cases} \tag{5.1.41}$$

可推出

$$\mu u_0 \leqslant \varphi_i \leqslant \upsilon u_0 \quad (i = 1,2,\cdots), \tag{5.1.42}$$

其中 $\upsilon > \mu > 0$ 是某两个常数.

证　先证充分性. 设从(5.1.41)式可推出(5.1.42)式，先证(5.1.40)式中第一式成立，根据(5.1.32)式，只需证 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\xi_n \geqslant \xi$. 用反证法，若不然，取 λ_0 以及 $\varepsilon_0 > 0$，使

$$\varliminf_{n\to\infty}\xi_n < \lambda_0 - \varepsilon_0 < \lambda_0 + \varepsilon_0 < \xi < \zeta \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\zeta_n,$$

于是存在子列,使

$$\xi_{n_i} < \lambda_0 - \varepsilon_0 < \lambda_0 + \varepsilon_0 < \zeta_{n_i} \quad (i = 1,2,\cdots), \tag{5.1.43}$$

从而 λ_0 属于 A_{n_i} 的正谱,设对应的正固有元为 φ_i,于是(5.1.41) 式满足,由假定,存在 $\upsilon > \mu > 0$ 使(5.1.42) 式成立,由于 $A_n u_0$ - 均敛于 A,故存在 i_0,使当 $i > i_0$ 时,有

$$\| A\varphi_i - A_{n_i}\varphi_i \|_{u_0} < (\xi - \lambda_0)\mu,$$

于是(注意到(5.1.42) 式)

$$A\varphi_i - A_{n_i}\varphi_i \leqslant (\xi - \lambda_0)\mu u_0,$$

$$\begin{aligned} A\varphi_i &\leqslant A_{n_i}\varphi_i + (\xi - \lambda_0)\mu u_0 = \lambda_0\varphi_i + (\xi - \lambda_0)\mu u_0 \\ &\leqslant \lambda_0\varphi_i + (\xi - \lambda_0)\varphi_i = \xi\varphi_i \quad (i > i_0). \end{aligned} \tag{5.1.44}$$

另一方面,取 $\xi < \lambda^* < \zeta$,则 λ^* 属于 A 的正谱,令对应的正固有元为 φ^*,于是

$$A\varphi^* = \lambda^*\varphi^* \geqslant \xi\varphi^*. \tag{5.1.45}$$

由(5.1.44) 式与(5.1.45) 式,利用文献[32] 中定理 1 即知,ξ 属于 A 的正谱,矛盾.

再证(5.1.40) 式中第二式成立,根据(5.1.32) 式,只需证 $\varlimsup_{n\to\infty}\zeta_n \leqslant \zeta$.用反证法,若不然,取 λ_0 及 $\varepsilon_0 > 0$,使

$$\varlimsup_{n\to\infty}\zeta_n > \lambda_0 + \varepsilon > \lambda_0 - \varepsilon > \zeta > \xi \geqslant \varlimsup_{n\to\infty}\xi_n,$$

于是,可取子列使(5.1.43) 式成立,从而(5.1.42) 式成立,由 $A_n u_0$ - 匀敛于 A 知,存在 i_0,使当 $i > i_0$ 时,恒有

$$\| A\varphi_i - A_{n_i}\varphi_i \|_{u_0} < (\lambda_0 - \zeta)\mu,$$

从而

$$A\varphi_i - A_{n_i}\varphi_i \geqslant -(\lambda_0 - \zeta)\mu u_0 \geqslant -(\lambda_0 - \zeta)\varphi_i,$$

$$\begin{aligned} A\varphi_i &\geqslant A_{n_i}\varphi_i - (\lambda_0 - \zeta)\varphi_i = \lambda_0\varphi_i - (\lambda_0 - \zeta)\varphi_i \\ &= \zeta\varphi_i \quad (i > i_0). \end{aligned} \tag{5.1.46}$$

另一方面,取 $\xi < \lambda^* < \zeta$,设 A 对应于 λ^* 的正固有元是 φ^*,则

$$A\varphi^* = \lambda^* \varphi^* \leqslant \zeta\varphi^*, \tag{5.1.47}$$

由(5.1.46)式与(5.1.47)式即知，ζ 属于 A 的正谱，矛盾. 充分性获证.

下证必要性. 设(5.1.40)式成立，又设(5.1.41)式满足，要证(5.1.42)式成立，在(5.1.41)式中令 $i \to \infty$，取极限，得

$$\xi \leqslant \lambda_0 - \varepsilon_0 \leqslant \lambda_0 + \varepsilon_0 \leqslant \zeta,$$

故 λ_0 属于 A 的正谱. 令对应的正固有元为 φ_0，则 $A\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0$. 由 A 的一致 u_0 - 凹性知，存在 $\beta > \alpha > 0$，使

$$\alpha u_0 \leqslant A\varphi_0 \leqslant \beta u_0,$$

从而(注意到 $\lambda_0 > 0$)：

$$\frac{\alpha}{\lambda_0} u_0 \leqslant \varphi_0 \leqslant \frac{\beta}{\lambda_0} u_0, \tag{5.1.48}$$

根据定理 5.1.1 知

$$\lim_{i \to \infty} \| \varphi_i - \varphi_0 \|_{u_0} = 0,$$

故存在 i_0，使当 $i > i_0$ 时，有

$$-\frac{\alpha}{2\lambda_0} u_0 \leqslant \varphi_i - \varphi_0 \leqslant \frac{\alpha}{2\lambda_0} u_0, \tag{5.1.49}$$

于是，由(5.1.48)式与(5.1.49)式，得

$$\mu^* u_0 \leqslant \varphi_i \leqslant \upsilon^* u_0 \quad (i > i_0), \tag{5.1.50}$$

其中 $\mu^* = \frac{\alpha}{2\lambda_0} > 0, \upsilon^* = \frac{\alpha}{2\lambda_0} + \frac{\beta}{\lambda_0} > 0$. 由 A_n 的一致u_0 - 凹性知，存在 $\beta_i > \alpha_i > 0 (i = 1,2,\cdots,i_0)$，使

$$\alpha_i u_0 \leqslant A_{n_i}\varphi_i \leqslant \beta_i u_0 \quad (i = 1,2,\cdots,i_0),$$

由此，再注意到(5.1.50)式即知(5.1.42)式成立，其中

$$\mu = \min\{\mu^*, \frac{\alpha_1}{\lambda_0}, \cdots, \frac{\alpha_{i_0}}{\lambda_0}\} > 0,$$

$$\upsilon = \max\{\upsilon^*, \frac{\beta_1}{\lambda_0}, \cdots, \frac{\beta_{i_0}}{\lambda_0}\} > 0,$$

必要性获证. #

定理5.1.7 设一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ u_0 - 匀敛于一致 u_0 - 凹算子 A,于是

(1) 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$,有 $\lambda_0(\underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n < \lambda_0 < \underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n + \varepsilon)$, $\varphi_0 \in P(\varphi_0 \neq \theta)$ 以及 $0 < \mu < \upsilon$ 存在,使

$$\mu u_0 \leqslant \left(\frac{A_n}{\lambda_0}\right)^m \varphi_0 \leqslant \upsilon u_0 \quad (n, m = 1,2,\cdots), \quad (5.1.51)$$

则必有 $\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi$;

(2) 如果对于任意的 $\varepsilon > 0$,有 $\lambda_0(\overline{\lim}_{n\to\infty}\zeta_n - \varepsilon < \lambda_0 < \overline{\lim}_{n\to\infty}\zeta_n)$, $\varphi_0 \in P(\varphi_0 \neq \theta)$ 以及 $0 < \mu < \upsilon$ 存在,使(5.1.51)式成立,则必 $\lim_{n\to\infty}\zeta_n = \zeta$.

证 只证(1).而(2)类似可证.

只需证 $\underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n \geqslant \xi$,用反证法.若不然,则由假设,存在 $\lambda_0(\underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n < \lambda_0 < \xi)$, $\varphi_0 \in P(\varphi_0 \neq \theta)$ 以及 $0 < \mu < \upsilon$,使(5.1.51)式成立,由

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n < \lambda_0 < \xi < \zeta \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\zeta_n$$

知,存在子列,使

$$\xi_{n_i} < \lambda_0 < \zeta_{n_i} \quad (i = 1,2,\cdots),$$

故 λ_0 属于 A_{n_i} 的正谱,令其对应的正固有元为 φ_i,即

$$A_{n_i}\varphi_i = \lambda_0\varphi_i \quad (i = 1,2,\cdots),$$

令 $\varphi_{i,0} = \varphi_0, \varphi_{i,m} = \frac{1}{\lambda_0}A_{n_i}\varphi_{i,m-1} \quad (m = 1,2,\cdots)$,

于是据文献[32]中定理7知

$$\| \varphi_{i,m} - \varphi_i \|_{u_0} \to 0 \quad (m \to \infty),$$

从而,由于 P 是正规的,知

$$\| \varphi_{i,m} - \varphi_i \| \to 0 \quad (m \to \infty), \quad (5.1.52)$$

但显然 $\varphi_{i,m} = \left(\frac{A_{n_i}}{\lambda_0}\right)^m \cdot \varphi_0$,故由(5.1.51)式及(5.1.52)式得(5.1.42)式.仿定理5.1.6充分性的证明,可得出 ξ 属于 A 的正谱,产生矛盾. #

下面我们来将上述理论具体应用于一个非线性积分方程.

例 5.1.1 考察 л.С.Урысон 算子

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y, \tag{5.1.53}$$

其中函数 $k(x,y,u)$ 满足 Урысон 条件(见文献[33]P291):

(1) $k(x,y,0) \equiv 0 \quad (a \leqslant x,y \leqslant b)$;

(2) $0 < k'_u(x,y,u) \leqslant M < +\infty \quad (a \leqslant x,y \leqslant b, 0 \leqslant u < +\infty)$,且 $k(x,y,u)$ 对每个 $u \geqslant 0$ 关于 $x,y \in [a,b]$ 可测;

(3) 对任何 $0 \leqslant u_1 < u_2$,恒有

$$\inf_{a \leqslant x,y \leqslant b}[k_u'(x,y,u_1) - k_u'(x,y,u_2)] > 0,$$

为简单起见,以下把满足条件(1)至(3)的算子(5.1.53)叫做 Урысон 型算子.

令 $E = L^2[a,b], P = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) \geqslant 0, \varphi(x) \in L^2[a,b]\}$;于是 P 是 E 中一个正规锥,令 $u_0(x) \equiv 1$,显然 $u_0 \in P, u_0 \neq \theta$,于是我们有下列诸结论:

①Урысон 型算子必是全连续的一致 u_0 - 凹算子.事实上,从文献[33]P291~294证明 Урысон 型算子(5.1.53)是 u_0 - 凹算子的证明过程中不难看出,Урысон 型算子(5.1.53)实际上还是一致 u_0 - 凹算子.

现设除了 Урысон 型算子(5.1.53)外,又给了一串 Урысон 型算子 A_n:

$$A_n\varphi(x) = \int_G k_n(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{5.1.54}$$

② 如果

$$|k_n(x,y,u)-k(x,y,u)|\leqslant \varepsilon_n u^2 \quad (a\leqslant x,y\leqslant b, u\geqslant 0), \tag{5.1.55}$$

其中，$\varepsilon_n\to 0$，则 A_n 必 u_0－匀敛于 A.

事实上，对 $\varphi\in P$，由(5.1.55)式知

$$|A_n\varphi(x)-A\varphi(x)|\leqslant \varepsilon_n\int_a^b[\varphi(y)]^2\mathrm{d}y,$$

故 $A_n\varphi(x)$ 一致收敛于 $A\varphi(x)$，从而

$$\|A_n\varphi-A\varphi\|_{u_0}\to 0 \quad (n\to\infty), \tag{5.1.56}$$

于是，$A_n u_0$－强敛于 A，再者，任给 $0<\mu<\upsilon$，则对一切 $\varphi(x)(\mu\leqslant\varphi(x)\leqslant\upsilon)$，我们有

$$|A_n\varphi(x)-A\varphi(x)|\leqslant \varepsilon_n\upsilon^2(b-a),$$

故，很明显，(5.1.56)式中的收敛关于一切满足 $\mu u_0\leqslant\varphi\leqslant\upsilon u_0$ 的 φ 是一致的，因此 $A_n u_0$－匀敛于 A.

于是由定理 5.1.1 与定理 5.1.3 得

③ 设不等式(5.1.55)满足. 如果 λ_0 属于 A 的正谱(ξ,ζ)，则 λ_0 必属于 A_n 的正谱(ξ_n,ζ_n)(当 n 充分大时)，并且 $\varphi_n(x;\lambda_0)$ 一致收敛(几乎处处)于 $\varphi(x;\lambda_0)$，这里 $\varphi_n(x;\lambda_0)$ 与 $\varphi(x;\lambda_0)$ 分别表示 A_n 与 A 对应于 λ_0 的正固有函数. 此外，还有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\xi_n\leqslant\xi,\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\zeta_n\geqslant\zeta.$$

很明显，如果

$$k_n(x,y,u)\leqslant k_{n+1}(x,y,u)\quad (n=1,2,\cdots), \tag{5.1.57}$$

则$\{A_n\}$是递增的，同样，如果

$$k_n(x,y,u)\geqslant k_{n+1}(x,y,u)(n=1,2,\cdots) \tag{5.1.58}$$

则$\{A_n\}$是递减的，于是，由定理 5.1.2 以及定理 5.1.4 与定理 5.1.5，得

④ 设不等式(5.1.55)以及不等式(5.1.57)(对应地，(5.1.58)式)满足，则 $\varphi_n(x;\lambda_0)$ 递增地(对应地，递减地)一致收敛(几乎处处)于 $\varphi(x;\lambda_0)$；此外，还有

$$\lim_{n\to\infty}\zeta_n = \zeta \quad (\text{对应地}, \lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi).$$

下面研究在什么条件下(5.1.36)式与(5.1.39)式满足.不难证明:如果存在 $\alpha(0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty)$,使

$$\lim_{u\to\alpha}\frac{1}{u}\int_b^a k(x,y,u)\mathrm{d}y = p(x) \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n, \qquad (5.1.59)$$

并且左端的收敛关于 $x \in [a,b]$ 是一致的,则(5.1.36)式必满足.事实上,任给 $\varepsilon > 0$,取 $c > 0$(c 与 α 很接近),使

$$\int_a^b k(x,y,c)\mathrm{d}y \leqslant (\underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n + \frac{\varepsilon}{2}) \cdot c \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

则有 $A\varphi_0 \leqslant \lambda_0\varphi_0$,这里 $\varphi_0(x) = c, \lambda_0 = \underline{\lim}_{n\to\infty}\xi_n + \frac{\varepsilon}{2}$.

同理可证:如果存在 $\beta(0 \leqslant \beta \leqslant +\infty)$,使

$$\lim_{u\to\beta}\frac{1}{u}\int_a^b k(x,y,u)\mathrm{d}y = g(x) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\zeta_n \qquad (5.1.60)$$

并且左端的收敛关于 $x \in [a,b]$ 是一致的,则(5.1.39)式必满足.于是,由定理5.1.4及定理5.1.5得

⑤ 设不等式(5.1.55)以及不等式(5.1.57)与(5.1.59)式(对应地,(5.1.58)式和(5.1.60)式)满足,则必有

$$\lim_{n\to\infty}\xi_n = \xi \quad (\text{对应地}, \lim_{n\to\infty}\zeta_n = \zeta).$$

§5.2 一致 u_0 - 凹算子列的极限算子的不动点及其逼近

再来讨论当一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ 按一定的条件收敛到极限算子 A 时,极限算子 A 的不动点的情况.

由于从应用中得来的非线性算子(微分算子、积分算子等)往往是近似确定的(比如,应用中出现的 Урысон 型积分算子

$$A\varphi = \int_G k(x,y,\varphi(y))\mathrm{d}y,$$

其核 $k(x,y,u)$ 往往是近似确定的),对于这样一些近似确定的非线性算子,我们需要用一些规范的非线性算子来近似代替它.这样一

来，对其不动点会产生怎样的影响呢？我们当然希望两者的不动点的偏差较小才好．以下我们就来对一致 u_0 − 凹算子列 $\{A_n\}$ 的极限算子 A 的不动点的存在惟一性进行讨论，最后将指出 A_n 的不动点与极限算子 A 的不动点可以充分接近，从而较好地解决了这一问题．

定义 5.2.1　设 X 是以 $\rho(x,y)$ 为距离的度量空间，算子 A 叫做**广义压缩**的，若对 $\beta \geqslant \alpha > 0$，当 $\alpha \leqslant \rho(x,y) \leqslant \beta$ 时，总存在实数 $0 \leqslant q(\alpha,\beta) < 1$，使

$$\rho(Ax,Ay) \leqslant q(\alpha,\beta) \cdot \rho(x,y).$$

如果对任何 $\beta \geqslant \alpha > 0$，$q(\alpha,\beta)(< 1)$ 为正的常数，则广义压缩算子 A 即成为压缩算子；

如果对任何正数 $\beta \geqslant \alpha > 0$，$0 \leqslant q(\alpha,\beta) \leqslant 1$，则广义压缩算子是非扩张（非膨胀）型算子（见文献[9]）；

进而，若 $q(\alpha,\beta) < 1$，则广义压缩算子即成为严格非扩张（非膨胀）型算子．

定义 5.2.2　设 E 是具锥 P 的 Banach 空间，设 $\theta \neq u_0 \in P$，称集合 $P(u_0) = \{x \mid x \in P, \exists\, a > 0, 使 \frac{1}{a}u_0 \leqslant x \leqslant a u_0\}$ 为锥 P 的分支．

注 1：从定义可见，对锥 P 中的每个非零元 u_0，总有相应的分支 $P(u_0)$．

注 2：由分支的定义知，零元素不属于任何分支．

注 3：若 $x \in P(u_0)$，则 $u_0 \in P(x)$，从而 $P(x) = P(u_0)$，即属于同一个分支的两个元素产生的分支相等．

注 4：设 $0 < \mu < \upsilon$，区间 $\{x \mid \mu u_0 \leqslant x \leqslant \upsilon u_0, x \in P\} \triangleq \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle \subset P(u_0)$．

注 5：$P(u_0) \subset E_{u_0} = \{x \mid x \in E, \exists\, \lambda > 0, -\lambda u_0 \leqslant x \leqslant \lambda u_0\}$．

下面我们将在某个分支 $P(u_0)$ 中定义一个新的距离．

定义 5.2.3　设 $P(u_0)$ 是 Banach 空间 E 中锥 P 的分支，对 x，$y \in P(u_0)$，记 $a(x,y)$ 为使 $x \leqslant ay$，$y \leqslant ax$ 正数 a 中的最小值，称

$$\rho_1(x,y) = \ln a(x,y)$$

为点 x 与 y 的距离.

如此引入的距离 $\rho_1(x,y)$ 满足距离的三个条件.

事实上,(1) 因 $a(x,y)$ 为使 $x \leqslant ay, y \leqslant ax$ 正数 a 中的最小值,若 $0 < a(x,y) < 1$,则 $x \leqslant ay \leqslant a^2 x < x$,矛盾,故必有 $a(x,y) \geqslant 1$,从而

$$\rho_1(x,y) = \ln a(x,y) \geqslant 0,$$

且 $\rho_1(x,y) = \ln a(x,y) = 0 \Leftrightarrow a(x,y) = 1 \Leftrightarrow x = y$;

(2) 因 $a(x,y) \geqslant 1$ 使 $x \leqslant ay, y \leqslant ax$,由 x, y 的对称性,即知:

$$\rho_1(x,y) = \ln a(x,y) = \ln a(y,x) = \rho_1(y,x);$$

(3) 记 $a(x,y)$ 为使 $x \leqslant a(x,y)y, y \leqslant a(x,y)x$ 正数 a 中的最小值,又记 $a(y,z)$ 为使 $y \leqslant a(y,z)z, z \leqslant a(y,z)y$ 正数 a 中的最小值,则由此两式可得

$$x \leqslant a(x,y)a(y,z)z,$$
$$z \leqslant a(y,z)a(x,y)x.$$

因 $a(x,z)$ 是使 $x \leqslant a(x,z)z, z \leqslant a(x,z)x$ 的正数 a 中最小值,故 $1 \leqslant a(x,z) \leqslant a(x,y)a(y,z)$,两边取自然对数得

$$\begin{aligned}\rho_1(x,z) &= \ln a(x,z) \leqslant \ln a(x,y)a(y,z) \\ &= \ln a(x,y) + \ln a(y,z) \\ &= \rho_1(x,y) + \rho_1(y,z)\end{aligned}$$

我们知道,要讨论一个算子 A 在某空间 X 中是否有惟一不动点,一般应从以下几个方面去考虑:

1° 所论及的空间 X 是否完备;

2° A 是否为 X 上的自映射;

3° A 是否为压缩映射.

在选择所考虑的空间 X 时,曾试选了锥 P 的分支 $P(u_0)$ 作为 X,因为 $P(u_0)$ 具有较好的性质:

①$P(u_0)$ 是锥 P 的子集;

② 即将证明：当锥 P 正规时，$P(u_0)$ 在距离 $\rho_1(x,y)$ 意义下是完备集.

但 $P(u_0)$ 中，对 x 应满足的条件 $\frac{1}{a}u_0 \leqslant x \leqslant au_0$ 始终不能让它与一致 u_0 - 凹算子定义中 x 的允许取值区间 $\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$ 相一致. 又由于 $\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$ 实际上是 $P(u_0)$ 的闭子集，$P(u_0)$ 的性质，它基本上都具有，所以想到将空间 X 取小一些，就取 $X = \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$.

空间基本取定之后，再试着考虑一致 u_0 - 凹算子 A 的压缩性. 既然 A 在通常的距离意义下是不可压缩的，自然要想到在距离 $\rho_1(x,y) = \ln a(x,y)$ 意义下是否压缩. 经研究发现，一致 u_0 - 凹算子并不是通常距离意义下的通常的压缩算子，而是在距离 $\rho_1(x,y)$ 意义下的广义压缩算子.

基于上述思路，我们现在来讨论一致 u_0 - 凹算子 A 在区间 $\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$ 上的不动点的存在性与惟一性.

引理 5.2.1　设 E 是具正规锥 P 的 Banach 空间，则分支 $P(u_0)$ 在距离 $\rho_1(x,y)$ 的意义下为完备的度量空间.

证　1° 先证 $P(u_0)$ 中的点列 $\{z_n\}$ 若依 $\rho_1(x,y)$ 是 Cauchy 序列，则必依 u_0 - 范数是 Cauchy 序列.

因 $\{z_n\}$ 是依距离 $\rho_1(x,y)$ 的 Cauchy 序列，故有界，即 $\exists M>0$，使 $\rho_1(z_n, u_0) \leqslant M (n = 1,2,\cdots)$.

由定义 5.2.3 知

$$z_n \leqslant a(z_n, u_0)u_0 \leqslant e^{\rho_1(z_n, u_0)} \cdot u_0 \leqslant e^M u_0,$$
$$u_0 \leqslant a(z_n, u_0)z_n \leqslant e^{\rho_1(z_n, u_0)} \cdot z_n \leqslant e^M z_n,$$

从而

$$e^{-M}u_0 \leqslant z_n \leqslant e^M u_0 \quad (n = 1,2,\cdots),$$

由于 $z_n \in P(u_0) \subset E_{u_0}$，故依 u_0 - 范数的定义得

$$\| z_n \|_{u_0} \leqslant e^M \quad (n = 1,2,\cdots).$$

设 $x, y \in P(u_0)$，由不等式：

$$x \leqslant e^{\rho_1(x,y)} y, \quad y \leqslant e^{\rho_1(x,y)} x,$$

得

$$e^{\rho_1(x,y)} y \leqslant x \leqslant e^{\rho_1(x,y)} y,$$

从而

$$[e^{-\rho_1(x,y)} - 1] y \leqslant x - y \leqslant [e^{\rho_1(x,y)} - 1] y.$$

因为 $-e^{-\rho_1(x,y)} \geqslant -1$,易知

$$-[e^{\rho_1(x,y)} - 1] y \leqslant x - y \leqslant [e^{\rho_1(x,y)} - 1] y. \quad (5.2.1)$$

因为

$$e^{-\rho_1(x,y)} x \leqslant y \leqslant e^{\rho_1(x,y)} x,$$

故

$$-e^{\rho_1(x,y)} x \leqslant -y \leqslant -e^{-\rho_1(x,y)} x$$

及

$$-[e^{\rho_1(x,y)} - 1] x \leqslant x - y \leqslant [1 - e^{-\rho_1(x,y)}] x,$$

而 $e^{\rho_1(x,y)} \geqslant 1$,可知

$$-[e^{\rho_1(x,y)} - 1] x \leqslant x - y \leqslant [e^{\rho_1(x,y)} - 1] x,$$

由于

$$-\| y \|_{u_0} \cdot u_0 \leqslant y \leqslant \| y \|_{u_0} \cdot u_0,$$

由(5.2.1)式即知

$$-[e^{\rho_1(x,y)} - 1] \| y \|_{u_0} u_0 \leqslant x - y \leqslant [e^{\rho_1(x,y)} - 1] \| y \|_{u_0} u_0,$$

又因为

$$-\| x \|_{u_0} \cdot u_0 \leqslant x \leqslant \| x \|_{u_0} \cdot u_0,$$

也有

$$-[e^{\rho_1(x,y)} - 1] \| x \|_{u_0} \cdot u_0$$
$$\leqslant x - y \leqslant [e^{\rho_1(x,y)} - 1] \| x \|_{u_0} \cdot u_0,$$

因此

$$\| x - y \|_{u_0} \leqslant [e^{\rho_1(x,y)} - 1] \| y \|_{u_0},$$
$$\| x - y \|_{u_0} \leqslant [e^{\rho_1(x,y)} - 1] \| x \|_{u_0},$$

从而

$$\| x - y \|_{u_0} \leqslant [e^{\rho_1(x,y)} - 1]\min\{ \| x \|_{u_0}, \| y \|_{u_0} \},$$

于是

$$\begin{aligned} \| z_n - z_m \|_{u_0} &\leqslant [e^{\rho_1(z_n,z_m)} - 1]\min\{ \| z_n \|_{u_0}, \| z_m \|_{u_0} \} \\ &\leqslant [e^{\rho_1(z_n,z_m)} - 1]e^M \\ &\qquad (\text{因 } \| z_n \|_{u_0} \leqslant e^M, n = 1,2,\cdots), \end{aligned}$$

所以当 $\rho_1(z_n, z_m) \to 0$ 时，必有 $\| z_n - z_m \|_{u_0} \to 0$，即当 $\{z_n\}$ 依 $\rho_1(x,y)$ 是 Cauchy 序列，必依 u_0 - 范数是 Cauchy 序列.

2° 再证 $P(u_0)$ 在距离 $\rho_1(x,y)$ 下完备.

设 $P(u_0)$ 中的点列 $\{z_n\}$ 依距离 $\rho_1(x,y)$ 为 Cauchy 序列. 因 P 正规，故由定理3.3.3知：E_{u_0} 在 u_0 - 范数意义下完备，从而 $\exists z^* \in E_{u_0}$，使 $\| z_n - z^* \|_{u_0} \to 0(n \to \infty)$，而且还依空间范数收敛，即有

$$\lim_{n \to \infty} \| z_n - z^* \| = 0.$$

另一方面，因 $\{z_n\}$ 在 $\rho_1(x,y)$ 下是 Cauchy 序列，故

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，对任何 $m = 1,2,\cdots$，有

$$\rho_1(z_{N+m}, z_N) < \varepsilon,$$

从而

$$z_N \leqslant e^{\rho_1(z_N, z_{N+m})} z_{N+m} \leqslant e^{\varepsilon} z_{N+m},$$

$$z_{N+m} \leqslant e^{\rho_1(z_N, z_{N+m})} z_N \leqslant e^{\varepsilon} z_N \quad (m = 1,2,\cdots),$$

令 $m \to \infty$ 得

$$z_N \leqslant e^{\varepsilon} z^*, z^* \leqslant e^{\varepsilon} z_N,$$

因此

$$z^* \in P(z_n) = P(u_0),$$

$$\rho_1(z_N, z^*) \leqslant \ln e^{\varepsilon} = \varepsilon,$$

即 $P(u_0)$ 依距离 $\rho_1(x,y)$ 完备. #

考察一致 u_0 - 凹算子的压缩性，我们有

引理 5.2.2　设 A 为一致 u_0 - 凹算子，且 $A:\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle \to \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$，则在距离 $\rho_1(x,y)$ 的意义下，A 必为 $\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$ 上的广义压缩算子.

证　1° 先证 A 满足不等式：

$$\rho_1(Ax,Ay)\leqslant \rho_1(x,y)-\ln[1+\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},\mathrm{e}^{-\rho_1(x,y)})],$$

$\forall\, x,y\in\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$ 且 $x\neq y$，

于是

$$\mu u_0\leqslant x\leqslant \upsilon u_0,\quad \mu u_0\leqslant y\leqslant \upsilon u_0,$$

由此得

$$x\leqslant \frac{\upsilon}{\mu}y,\quad y\leqslant \frac{\upsilon}{\mu}x,$$

从而

$$a(x,y)\leqslant \frac{\upsilon}{\mu},\quad a^{-1}(x,y)\geqslant \frac{\mu}{\upsilon},$$

此时 $a(x,y)>1$，因此

$$0<\frac{\mu}{\upsilon}\leqslant \mathrm{e}^{\rho_1(x,y)}<1,$$

取 $t=\mathrm{e}^{-\rho_1(x,y)}$，则

$$t\in[\frac{\mu}{\upsilon},\mathrm{e}^{-\rho_1(x,y)}]\subset(0,1).$$

因为

$$x\leqslant a(x,y)y,\quad y\leqslant a(x,y)x,$$

故

$$\mathrm{e}^{-\rho_1(x,y)}x\leqslant y,\quad \mathrm{e}^{-\rho_1(x,y)}y\leqslant x.$$

将增算子 A 作用到上述两个不等式，再由增算子 A 的一致 u_0 - 凹性可得

$$Ay\geqslant A[\mathrm{e}^{-\rho_1(x,y)}x]\geqslant[1+\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},\mathrm{e}^{\rho_1(x,y)})]\mathrm{e}^{-\rho_1(x,y)}Ax,$$

$$Ax\geqslant A[\mathrm{e}^{-\rho_1(x,y)}y]\geqslant[1+\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},\mathrm{e}^{-\rho_1(x,y)})]\mathrm{e}^{-\rho_1(x,y)}Ay,$$

其中，$\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},e^{-\rho_1(x,y)})>0$.

因为 $A:\langle\mu u_0,\upsilon u_0\rangle\to\langle\mu u_0,\upsilon u_0\rangle$，故由关于距离 $\rho_1(x,y)=\ln a(x,y)$ 的定义 5.2.3 即知

$$a(Ax,Ay)\leqslant[1+\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},e^{-\rho_1(x,y)}]^{-1}e^{\rho_1(x,y)},$$

所以

$$\rho_1(Ax,Ay)\leqslant\rho_1(x,y)-\ln[1+\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},e^{-\rho_1(x,y)})],$$

记

$$\varphi[\rho_1(x,y)]=\ln[1+\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},e^{-\rho_1(x,y)})],$$

则

$$\rho_1(Ax,Ay)\leqslant\rho_1(x,y)-\varphi[\rho_1(x,y)],\qquad(5.2.2)$$

此处，$\varphi(r)$ 对 $r>0$ 是正连续的(事实上，由一致 u_0 - 凹算子的定义知，$\eta=\eta(\mu,\upsilon,a,b)>0$ 是关于 μ,υ,a,b 的函数，而当区间$\langle\mu u_0,\upsilon u_0\rangle$ 确定时，μ、υ、$\frac{\mu}{\upsilon}$ 均为定值，此时 $\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},e^{-\rho_1(x,y)})$ 仅为 $\rho_1(x,y)$ 的函数，由上述证明过程可知，当 $\rho_1(x,y)>0$ 时，$\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},e^{-\rho_1(x,y)})$ 满足一致 u_0 - 凹算子定义中的条件，此时 $\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},e^{-\rho_1(x,y)})>0$，从而 $\ln[1+\eta(\mu,\upsilon,\frac{\mu}{\upsilon},e^{-\rho_1(x,y)})]$ 取正值，而对数函数连续，故 $\varphi(r)$ 对 $r>0$ 是正连续的).

2° 再证 A 是$\langle\mu u_0,\upsilon u_0\rangle$ 上的广义压缩算子.

因当 $0<\alpha\leqslant r\leqslant\beta$ 时，连续函数 $\varphi(r)$，在$[\alpha,\beta]$ 上必有最小值，记为 $m(\alpha,\beta)$，而 $\varphi(r)>0$，故必 $m(\alpha,\beta)>0$，由(5.2.2) 式得

$$\varphi[\rho_1(x,y)]\leqslant\rho_1(x,y)-\rho_1(Ax,Ay)\leqslant\rho_1(x,y),$$

故当 $0<\alpha\leqslant\rho_1(x,y)\leqslant\beta$ 时，由上式有：

$$0<m(\alpha,\beta)\leqslant\varphi[\rho_1(x,y)]\leqslant\rho_1(x,y)\leqslant\beta,$$

从而

$$0 < \frac{m(\alpha,\beta)}{\beta} \leqslant 1, \quad \frac{\varphi[\rho_1(x,y)]}{\rho_1(x,y)} \geqslant \frac{m(\alpha,\beta)}{\beta},$$

此时(5.2.2)式可改写成:

$$\begin{aligned}\rho_1(Ax,Ay) &\leqslant \rho_1(x,y) - \left\{\frac{\varphi[\rho_1(x,y)]}{\rho_1(x,y)}\right\} \cdot \rho_1(x,y) \\ &= \left\{1 - \frac{\varphi[\rho_1(x,y)]}{\rho_1(x,y)}\right\} \rho_1(x,y) \\ &\leqslant \left\{1 - \frac{m(\alpha,\beta)}{\beta}\right\} \cdot \rho_1(x,y) \\ &= q(\alpha,\beta)\rho_1(x,y),\end{aligned}$$

其中 $q(\alpha,\beta) = 1 - \frac{m(\alpha,\beta)}{\beta}$,由于$0 < \frac{m(\alpha,\beta)}{\beta} \leqslant 1$,故有$0 \leqslant q(\alpha,\beta) < 1$,因此 A 为$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$上的广义压缩算子. #

既然映$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$入$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$的一致 u_0 - 凹算子 A 依$\rho_1(x,y)$是广义压缩的,若区间$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$依 $\rho_1(x,y)$完备,则 A 在$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$中必有惟一不动点,基于这个思想,有:

定理5.2.1 设E是具正规锥P的Banach空间,且序区间$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$上的一致 u_0 - 凹算子 $A:\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle \to \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$,则 A 在$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$上有惟一的不动点 x^*,并对任何初值 $x_0 \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$,迭代列 $x_n = Ax_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$ 按距离 $\rho_1(x,y)$ 收敛到 x^*.

证 1° 先证区间$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$在 $\rho_1(x,y)$ 意义下完备.

由于P是正规锥,据引理5.2.1知,分支 $P(u_0)$在距离 $\rho_1(x,y)$意义下是完备的度量空间. 故只需证$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle \subset P(u_0)$ 在 $\rho_1(x,y)$ 意义下为闭集.

在区间$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$中任取点列$\{x_n\}$,即

$$\mu u_0 \leqslant x_n \leqslant \upsilon u_0 (n = 1,2,\cdots).$$

若$\{x_n\}$依距离 $\rho_1(x,y)$ 收敛于 x^*,即 $x_n \xrightarrow{\rho_1} x^*(n \to \infty)$,

则由引理 5.2.1 知:$\{x_n\}$ 必依空间范数收敛于 x^*,即 $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_E} x^*(n \to \infty)$,由此即得

$$\mu u_0 \leqslant x^* \leqslant \upsilon u_0,$$

亦即 $x^* \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$,故$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$为闭集,从而序区间$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$在 $\rho_1(x,y)$ 意义下完备.

2° 再证A 在$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$上有惟一不动点 x^*,且对任何初始值 $x_0 \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$,迭代列 $x_n = Ax_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$ 按距离 $\rho_1(x,y)$ 收敛到 x^*.

考察数列:

$$b_n = \rho_1(x_n, x_{n-1}) \quad (n = 1,2,\cdots),$$

因 A 为一致 u_0 - 凹算子,且 $A:\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle \to \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$.故由引理 5.2.2 知:

$$\rho_1(Ax, Ay) \leqslant \rho_1(x,y) - \varphi[\rho_1(x,y)],$$

$\varphi(r)$ 关于 $r > 0$ 正连续.
故有

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \rho_1(x_{n+1}, x_n) = \rho_1(Ax_n, Ax_{n-1}) \\ &\leqslant \rho_1(x_n, x_{n-1}) = b_n \end{aligned}$$

即$\{b_n\}$是单调减的,且下方有界(为零).设 b^* 是$\{b_n\}$的极限,则 $b^* \geqslant 0$,下证 $b^* = 0$.

若不然,设 $b^* > 0$,则对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,当 $n \geqslant N$ 时,

$$0 < b_n - b^* < \varepsilon,$$

取 $\varepsilon = 1$,则对充分大的 n,有:

$$b^* < b_n < b^* + 1$$

或
$$b^* < b_{N+m} < b^* + 1 \quad (m = 1,2,\cdots),$$

于是

$$b^* < \rho_1(x_{N+m-t}, x_{N+m-t-1}) < b^* + 1 \quad (1 \leqslant t \leqslant m),$$

因 A 广义压缩,故

$$\begin{aligned} b_{N+m} &= \rho_1(Ax_{N+m-1}, Ax_{N+m-2}) \\ &\leqslant q(b^*, b^* + 1) \cdot \rho_1(x_{N+m-1}, x_{N+m-2}) \\ &\leqslant \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\leqslant [q(b^*, b^*+1)]^m \cdot \rho_1(x_N, x_{N-1})$$
$$\leqslant [q(b^*, b^*+1)]^m \cdot (b^*+1).$$

因 $0 \leqslant q(b^*, b^*+1) < 1$,故 $b_n \to 0(n \to \infty)$ 与 $b^* > 0$ 矛盾,所以 $b^* = 0$.

由于 $b_n \to 0$,故对 $\forall \varepsilon > 0$,选取 N,当 $n \geqslant N$ 时,

$$b_n < \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \min_{\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \rho_1(x,y) \leqslant \varepsilon} \varphi[\rho_1(x,y)]\right\},$$

来证算子 $A: S_N = \{x \mid \rho_1(x, x_N) \leqslant \varepsilon\} \to S_N$.

其实,若 $0 \leqslant \rho_1(x, x_N) < \frac{\varepsilon}{2}$,则有:

$$\rho_1(Ax, x_N) \leqslant \rho_1(Ax, Ax_N) + \rho_1(Ax_N, x_N)$$
$$\leqslant \rho_1(x, x_N) + b_{N+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

若 $\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \rho_1(x, x_N) \leqslant \varepsilon$,则有:

$$\rho_1(Ax, x_N) \leqslant \rho_1(Ax, Ax_N) + \rho_1(Ax_N, x_N)$$
$$\leqslant \rho_1(x, x_N) - \varphi[\rho_1(x, x_N)] + b_{N+1}$$
$$< \rho_1(x, x_N) \leqslant \varepsilon.$$

再证 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列,即证:

$$\rho_1(x_{N+m}, x_N) < \varepsilon \quad (m = 1,2,\cdots).$$

因 $\rho_1(x_{N+1}, x_N) = b_{N+1} < \varepsilon$,故 $x_{N+1} \in S_N$,
而 $A: S_N \to S_N$,所以

$$\rho_1(x_{N+2}, x_N) = \rho_1(Ax_{N+1}, x_N) < \varepsilon,$$

类推即得

$$\rho_1(x_{N+m}, x_N) < \varepsilon \quad (m = 1,2,\cdots),$$

由 $\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$ 的完备性,得 $x_n \to x^* \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$,据 $x_n = Ax_{n-1}$,即知 x^* 为 A 的不动点,再由 A 的广义压缩性可知,不动点 x^* 惟一. #

最后来讨论当一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ 按适当的条件收敛于算

子 A 时,极限算子 A 的不动点的存在惟一性,以及 A_n 与 A 的不动点之关系.

定理5.2.2 设 E 为具正规锥 P 的Banach空间,$\{A_n\}$ 为一致 u_0 - 凹算子列,若 A_n 满足:

(1) $A_n:\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle \to \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle (n=1,2,\cdots)$;

(2) 诸 A_n 是等度的;

(3) A_n 是 u_0 - 匀敛于正的增算子 A.

则极限算子 A 在 $\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$ 上有惟一不动点 x^*,并对任何初始值 $x_0 \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$,迭代列 $x_n = Ax_{n-1}(n=1,2,\cdots)$ 依距离 $\rho_1(x,y)$ 收敛到 x^*.

证 据引理5.1.1知,当一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ 是 u_0 - 匀敛于 A,且诸 A_n 等度时,极限算子 A 必为一致 u_0 - 凹算子.

下证 $A:\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle \to \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$.

因为 $A_n:\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle \to \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$,故对 $\forall x \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$,有:

$$\mu u_0 \leqslant A_n x \leqslant \upsilon u_0 \quad (n=1,2,\cdots),$$

又因 A_n 是 u_0 - 匀敛于 A,故当 $0<\mu<\upsilon$ 时,对一切满足 $\mu u_0 \leqslant x \leqslant \upsilon u_0$ 的 x,一致有:

$$\lim_{n\to\infty} \| A_n x - Ax \|_{u_0} = 0,$$

于是,由 u_0 - 范数的定义,对 $\forall \varepsilon > 0$,当 n 充分大时,有

$$-\varepsilon u_0 \leqslant A_n x - Ax \leqslant \varepsilon u_0,$$

因此

$$Ax \geqslant A_n x - \varepsilon u_0 \geqslant \mu u_0 - \varepsilon u_0 = (\mu - \varepsilon) u_0,$$

$$Ax \leqslant A_n x + \varepsilon u_0 \leqslant \upsilon u_0 + \varepsilon u_0 = (\upsilon + \varepsilon) u_0,$$

由 u_0 - 匀敛性知,上述关系对满足 $\mu u_0 \leqslant x \leqslant \upsilon u_0$ 的一切 x 成立.故令 $\varepsilon \to 0$,即得

$$\mu u_0 \leqslant Ax \leqslant \upsilon u_0,$$

因此

$$A:\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle \to \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle.$$

再据定理 5.2.1 即知本定理的结论成立. #

定理 5.2.3　在定理 5.2.2 的条件下,一致 u_0 - 凹算子 A_n 及 A 在 $\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$ 中的不动点满足:

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n^* - x^* \| = 0,$$

其中 x_n^* 为 A_n 的不动点($n = 1,2,\cdots$),x^* 为 A 的不动点.

证　据定理 5.1.1 知:当一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ 等度,且 u_0 - 匀敛于正的增算子 A 时,若 $\lambda_0 > 0$ 属于 A 的正谱,则当 n 充分大时,λ_0 也属于 A_n 的正谱,并且

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_n(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0) \|_{u_0} = 0,$$

其中 $\varphi(\lambda_0)$ 与 $\varphi_n(\lambda_0)$ 分别表示 A 与 A_n 对应于 λ_0 的惟一正固有元. 因 A 是正算子,故由文献[29]定理 4 知,$\lambda_0 = 1$ 属于 A 的正谱,又因为对应于 λ_0 的固有元惟一,故当 $\lambda_0 = 1$ 时,$\varphi(\lambda_0)$,$\varphi_n(\lambda_0)$ 即是 A 与 A_n 的不动点 x^* 及 x_n^*,因此有:

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n^* - x^* \|_{u_0} = 0,$$

又因 P 正规,故立即可得:

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n^* - x^* \| = 0. \quad \#$$

上述问题的意义在于:

① 完整地解决了一致 u_0 - 凹算子的不动点的存在惟一性;

② 一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ 按一定的条件去逼近非线性算子 A 时,A 的不动点也存在惟一,且 A_n 与 A 的不动点可任意接近.

由于一致 u_0 - 凹算子列 $\{A_n\}$ 按定理 5.2.2 的条件收敛于 A 时,极限算子 A 也为一致 u_0 - 凹算子,因此讨论极限算子方程 $Ax = x$ 逼近解的收敛速度问题具有很强的实际意义. 我们最后再来讨论迭代列 $x_n = Ax_{n-1}$($n = 1,2,\cdots$) 的收敛速度问题.

定理 5.2.4　设 E 是具正规锥 P 的 Banach 空间,且一致 u_0 - 凹算子 $A:\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle \to \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$,又设 A 在方程 $Ax = x$ 的解 x^* 处

Fréchet 可微,用 r_0 记有界线性算子 $A'(x^*)$ 的谱半径,并设 $r_0 < 1$,则迭代列 $x_n = Ax_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$ 按空间范数收敛到 x^*,且对充分接近 x^* 的初始元 $x_0 \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$,有:

$$\| x_n - x^* \| \leqslant C(x_0,\varepsilon)(r_0+\varepsilon)^n,$$

此处 ε 为充分小的正数,$C(x_0,\varepsilon)$ 是一与 x_0,ε 有关的正的常数.

证 据定理2.3.1及其系的讨论可知,对 $\forall \varepsilon > 0$,在 E 中可构造一等价范数 $\| \cdot \|_*$,使

$$m(\varepsilon)\| x \| \leqslant \| x \|_* \leqslant M(\varepsilon)\| x \|, \quad x \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$$

及

$$\| A'(x^*)h \|_* \leqslant (r_0 + \frac{\varepsilon}{2})\| h \|_*, \quad x \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle,$$

由 Fréchet 导数的定义,$\exists \delta > 0$,使对 $\| x - x^* \| < \delta$ 中的x,有:

$$\| Ax - Ax^* - A'(x^*)(x - x^*) \|_* \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\| x - x^* \|_*,$$

所以,如果 $\| x - x^* \| < \delta$,则

$$\begin{aligned} \| Ax - Ax^* \|_* &\leqslant \| Ax - Ax^* - A'(x^*)(x - x^*) \|_* \\ &\quad + \| A'(x^*)(x - x^*) \|_* \\ &\leqslant (r_0 + \varepsilon)\| x - x^* \|_*, \end{aligned}$$

由于正数 ε 可充分小,故可使 $r_0 + \varepsilon < 1$.

据定理 5.2.1 知,此时一致 u_0 - 凹算子 A 在 E 的闭子集 $\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$ 上有惟一不动点 x^*,即算子方程 $Ax = x$ 在$\langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$ 上有惟一正解 x^*,且对初始元 $x_0 \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0 \rangle$,迭代列 $x_n = Ax_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$ 按距离 $\rho_1(x,y)$ 收敛到 x^*,据引理5.2.1的证明过程知,迭代列 $x_n = Ax_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$ 按空间范数 $\| \cdot \|$,从而按等价范数 $\| \cdot \|_*$ 也收敛到 x^*,且

$$\begin{aligned} \| x_n - x^* \|_* &= \| Ax_{n-1} - Ax^* \|_* \\ &\leqslant (r_0 + \varepsilon)\| x_{n-1} - x^* \|_* \\ &= (r_0 + \varepsilon)\| Ax_{n-2} - Ax^* \|_* \end{aligned}$$

$$\leqslant (r_0+\varepsilon)^2 \| x_{n-2} - x^* \|_*$$
$$\leqslant \cdots$$
$$\leqslant (r_0+\varepsilon)^n \| x_0 - x^* \|_*,$$

所以

$$\begin{aligned}\| x_n - x^* \| &\leqslant \frac{1}{m(\varepsilon)} \| x_n - x^* \|_* \\ &\leqslant \frac{\| x_0 - x^* \|_*}{m(\varepsilon)} (r_0+\varepsilon)^n \\ &\leqslant \frac{M(\varepsilon)}{m(\varepsilon)} \| x_0 - x^* \| \cdot (r_0+\varepsilon)^n \\ &\stackrel{\Delta}{=\!=} C(x_0,\varepsilon)\cdot(r_0+\varepsilon)^n. \quad \#\end{aligned}$$

定理说明,若一致 u_0 - 凹算子方程 $Ax = x$ 有解 x^*,则当 $A'(x^*)$ 的谱半径 $r_0 < 1$ 时,对靠近 x^* 的初始元 x_0 所决定的迭代列 $x_n = Ax_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$,可按任意接近 r_0 的实数为公比的几何级数速度收敛到 x^*,这已经是一个比较迅速的收敛过程,具有较强的实用价值.

然而,对定理 5.2.4 的条件作适当的改进,还可得到更为迅速的收敛过程.

定理 5.2.5 设 E 是具正规锥 P 的 Banach 空间,且一致 u_0 - 凹算子 $A:\langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle \to \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$,又设算子 A 满足:

(1) 在方程 $Ax = x$ 的解 x^* 处 Fréchet 可微,且 $A'(x^*) = 0$;

(2) $\| A'(x) - A'(y) \| \leqslant L \| x - y \|$ (x, y 为 x^* 附近的点),则当初值 x_0 充分靠近 x^* 时,迭代列 $x_n = Ax_{n-1}(n = 1,2,\cdots)$ 收敛到解 x^*,且

$$\| x_n - x^* \| \leqslant C(\delta, x_0)\cdot \delta^{2^n},$$

此处,δ 为任意小的正数.

证 由条件(1),一致 u_0 - 凹算子 A 在不动点 $x^* \in \langle \mu u_0, \upsilon u_0\rangle$ 处 Fréchet 可微,据文献[1]P55 定理 3.4(2) 同理可知,对 x^* 邻域中的 x,$\exists\, \theta \in (0,1)$,使得

$$\| Ax - Ax^* \| \leqslant \| A'[\theta x + (1-\theta)x^*] \| \cdot \| x - x^* \|$$

由条件(2) 及 $A'(x^*) = 0$ 得

$$\begin{aligned} & \| A'[\theta x + (1-\theta)x^*] \| \\ = & \| A'[\theta x + (1-\theta)x^*] - A'(x^*) \| \\ \leqslant & L \| \theta x + (1-\theta)x^* - x^* \| \\ = & L\theta \| x - x^* \| < L \| x - x^* \| . \end{aligned}$$

因 x^* 为算子方程 $Ax = x$ 的解,故 $x^* = Ax^*$,从而由上两式得

$$\| Ax - x^* \| = \| Ax - Ax^* \| < L \| x - x^* \|^2,$$

取 $r \in (0,\frac{1}{L})$,则由上式知,算子 A 映开球 $O(x^*,r)$ 入自己,假定 $x_{n_0} \in O(x^*,r)$,则对所有的 $n > n_0$,迭代列 $\{x_n\}$ 也属于 $O(x^*,r)$,而且

$$\begin{aligned} \| x_n - x^* \| &= \| Ax_{n-1} - x^* \| \\ &< L \| x_{n-1} - x^* \|^2 \\ &< L \cdot L^2 \| x_{n-2} - x^* \|^2 \\ &< \cdots \\ &< L^{1+2+2^2+\cdots+2^{n-n_0-1}} \cdot \| x_{n_0} - x^* \|^{2^{n\ n_0}}, \end{aligned}$$

于是

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{1}{L}(L \| x_{n_0} - x^* \|)^{2^{n\ n_0}},$$

记

$$\delta = L \| x_{n_0} - x^* \| .$$

因为

$$\| x_{n_0} - x^* \| < r,$$

所以

$$\delta \in (0,1),$$

因此

$$\| x_n - x^* \| \leqslant \frac{1}{L}\delta^{2^{n-n_0}} = C(\delta, x_0) \cdot \delta^{2^n},$$

这里

$$C(\delta, x_0) = \frac{1}{L} \cdot \delta^{2^{-n_0}}. \quad \#$$

从定理可见,这是一个非常迅速的收敛过程,这个结果是比较理想的.

这样,我们就完整地解决了一致 u_0 - 凹算子方程逼近解的问题.

主要参考文献

[1] 郭大钧.非线性泛函分析.山东科技出版社,1985
[2] 陈文嫄.非线性泛函分析.甘肃人民出版社,1982
[3] 钟承奎,范先令,陈文嫄.非线性泛函分析引论.兰州大学出版社,1998
[4] 关肇直.泛函分析讲义.高等教育出版社,1958
[5] 夏道行,严绍宗,吴卓人,舒五昌.实变函数论与泛函分析(下册).高等教育出版社,1985
[6] 郑维行,王声望.实变函数论与泛函分析概要(第二册).人民教育出版社,1980
[7] 柳藩,钱佩玲.实变函数论与泛函分析.北京师范大学出版社,1987
[8] 夏道行,舒五昌,严绍宗,童裕孙.泛函分析第二教程.高等教育出版社,1987
[9] 张石生.不动点理论及应用.重庆出版社,1984
[10] 吉田耕作.泛函分析(吴元恺等译).人民教育出版社,1980
[11] D. R. Smart. *Fixed point theorems*. Cambridge university Press, 1980
[12] Deimling K. *Nonlinear eunctional analysis*. Springer-verlag, Berlin, 1985
[13] N. Dunford, J. T. Schwart. *Linear operators*. I, New York, 1958
[14] 郭大钧.非线性算子方程的正解及其对非线性积分方程的应

用.数学进展,1984(13)
[15] 郭大钧.一类非线性算子的极限算子的正谱.山东大学学报(自然科学版),1981(3)
[16] 宋福民.Banach 空间中两点边值问题的解.数学年刊,1993,14A(6)
[17] 郑雄军,孙经先.半序线性空间增算子的某些不动点定理.江西师范大学学报(自然科学版),2003(2)
[18] 陈晓雷.一致 u_0 - 凹算子方程逼近解的收敛速度.南昌大学学报(理科版),2004(2)
[19] 陈晓雷.一类非线性算子的极限算子的不动点及其逼近.江西科学,2000(1)
[20] 陈晓雷.一类算子方程逼近解的加速收敛.渤海大学学报(自然科学版),2005(1)
[21] 陈晓雷.再论增算子不动点定理.渤海大学学报(自然科学版),2004(1)
[22] 陈晓雷.关于 Edelstein 不动点定理的改进.锦州师范学院学报(自然科学版),2002(1)
[23] 陈晓雷.拟凹算子的不动点及其逼近.锦州师范学院学报(自然科学版),2000(2)
[24] 陈晓雷.关于一致压缩算子方程解的连续性.江西教育学院学报(自然科学版),2001(3)
[25] 陈晓雷.关于一个不动点定理的简易证明.江西教育学院学报(自然科学版),2002(6)
[26] 陈晓雷.一类非线性算子的 u_0 - 凹性.江西教育学院学报(自然科学版),1994(6)
[27] 陈晓雷.一类非线性积分算子的不动点.河南教育学院学报(自然科学版),1997(1)
[28] H. Amann. *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces*. SIAM. Review, 1976(18)

[29] Karlin. S. *Positive operators*. J Math and Mech,1959(18)

[30] P. J. Bushell. *Hilbert's metric and positive contraction mappings in a Banach space*. Arch. Rational Mech Anal,1973(52)

[31] I. F. Bonsall. *Linear operators in complete positive cones*. proc. London Math,Soc, 1958(29)

[32] И. А. Бахтин, О нелнейных уравнениях с равномерно вогнутыми оцераторами,Сиб. Матем. ж. ,4:2(1963)

[33] М. А. Красносельский, Тоцологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений,Москва,1956

[34] 熊金城.点集拓扑讲义.人民教育出版社,1981

[35] 文锦,陈文虎.关于增算子和减算子的几个不动点定理.湖南教育学院学报,1997(5)

[36] 孙经先.Banach空间中某些新的列紧性判别法及其应用.数学年刊,1990,11A(4)

[37] 陈晓雷.关于凹算子方程的正解.渤海大学学报(自然科学版),2005(3)

[38] 陈晓雷.再论 u_0 - 凹算子的不动点.南昌大学学报(工科版),2005(3)

后　记

本书是江西省自然科学基金项目(编号0311002)的最终研究成果之一。

本书以笔者在南昌给数学专业的学生讲授“算子方程理论”某些专题的讲稿为基础,再加上笔者近年来所取得的若干研究成果整理而成.本书的目的是想用不大的篇幅,集中讨论几个重要的基础理论课题,若能给读者阅读时起到一点参考作用,则不胜欣慰.

本书汲取和引用了国内外许多专家学者的研究成果,并在本书末尾的参考文献中一一列出,在此,笔者特向有关专家学者表示衷心的感谢。

由于交稿时间较为仓促,又限于作者水平,诚恳地盼望读者指出书中错误与不妥之处.

陈晓雷

2005年5月于浙江财经学院